Lista 6 - Probabilidade

Modos de Convergência

1 — Suponha que $X_n \xrightarrow{r} X$ para $r \geq 1$. Mostre que $\mathbf{E}|X_n^r| \to \mathbf{E}|X^r|$.

2 — Suponha que $X_n \xrightarrow{D} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} c$, onde c é uma constante. Prove que $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$

3 — Prove o Teorema da Aplicação Contínua para $\xrightarrow{p}$:

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$$

4 — Deixe X_n ser uma sequência de variáveis aleatórias independentes que converge em probabilidade para X. Mostre que X é constante quase certamente.

5 — Prove que se $X_n \xrightarrow{2} X$ para $r \geq 1$. Mostre que $\mathbf{Var}[X_n] \to \mathbf{Var}[X]$.

6 — Convergência em probabilidade e convergência em L^p Mostre que a convergência em L^p implica convergência em Probabilidade para todos $p > 0$. Mostre que o recíproca não é válida. (Prove por exemplo para $p = 1$).

7 — Considere as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$ com funções de distribuição $F_1, F_2, \ldots$. Suponha que $X_n \to X$ em distribuição, e a função de distribuição F de X seja contínua. Prove que $F_n \to F$ na norma sup, i.e.

$$\|F_n - F\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0.$$

8 — Considere as variáveis aleatórias a valores inteiros $X_1, X_2, \ldots$, e uma variável aleatória X. Mostre que $X_n \to X$ na distribuição se e somente se

$$\mathbf{P}(X_n = k) \to \mathbf{P}(X = k) \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

9 — Considere variáveis aleatórias independentes $X_1, X_2, \ldots$ uniformemente distribuídas em $[0, 1]$, e deixe $Z_n = \max_{k \leq n} X_k$.

a) Prove que $Z_n \to 1$ em probabilidade.

b) Prove que $Z_n \to 1$ quase certamente.

10 — Realizamos o seguinte experimento aleatório. Colocamos $n \geq 10$ bolas azuis e n bolas vermelhas em uma bolsa. Nós escolhemos 10 bolas aleatoriamente (sem substituição) da bolsa. Deixe X_n ser o número de bolas azuis. Realizamos esse experimento para $n = 10, 11, 12, \cdots$. Prove que $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{Bin}\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

11 — Deixe $X_1, X_2, X_3, \cdots$ ser uma sequência de variáveis aleatórias, de modo que

$$X_n \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{\lambda}{n}\right), \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{1}$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante. Defina uma nova sequência Y_n como

$$Y_n = \frac{1}{n} X_n, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{2}$$

Mostre que Y_n converge em distribuição para $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

12 — Deixe $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ e $\{Y_n, n = 1, 2, \cdots\}$ serem duas sequências de variáveis aleatórias, definidas no espaço amostral Ω . Suponha que

$$X_n \xrightarrow{p} X, \tag{3}$$

$$Y_n \xrightarrow{p} Y. \tag{4}$$

Prove que $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$.

13 — Considere a sequência $\{X_n, n = 1, 2, 3, \cdots\}$ tal que

$$X_n = \begin{cases} n & \text{com probabilidade } \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - \frac{1}{n^2} \end{cases} \tag{5}$$

Mostre que

a) $X_n \xrightarrow{p} 0$.

b) $X_n \xrightarrow{L^r} 0$, para $r < 2$.

c) X_n não converge para 0 na r-média para qualquer $r \geq 2$.

d) $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$.

14 — Se uma sequência de variáveis aleatórias X_n converge em probabilidade para uma variável aleatória X, então X_n também converge em distribuição para X.

15 — Prove o Teorema de Representação de Skorokhod:

Suponha que $X_n \xrightarrow{d} X$. Então, existem variáveis aleatórias X'_n distribuídas de forma idêntica à X_n e uma variável aleatória X' distribuída de forma idêntica à X, e tal que

$$X'_n \xrightarrow{q.c.} X'$$

Dicas: Seja F_n a função de distribuição de X_n e F a função de distribuição de X. Suponha que $X_n \to X$ em distribuição. Seja

$$X'_n(\omega) = \inf\{\omega : F_n(x) \geq \omega\},$$

$$X'(\omega) = \inf\{\omega : F(x) \geq \omega\},$$

Prove que dado x um ponto de continuidade de F. Então $X'_n(x) \to X'(x)$

16 — Lema de Unicidade

Suponha que as variáveis aleatórias X_n convergem para alguma variável aleatória X em distribuição. Mostre que a distribuição de X é definida de forma única.

Dica: você pode usar o Teorema de Represenção de Skorokhod

17 — Suponha que $X_n \to X$ em distribuição e a_n sejam números reais tais que $a_n \to 0$ como $n \to \infty$. Mostre que $a_n X_n \to 0$ em distribuição.

18 — [**1.6pt**] Dadas variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$, i.i.d., com média comum $\mathbf{E}X_1 = 0$ e variância $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X_1)$, defina $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e mostre que

a) $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$;

b) $\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$.

Dica:
Dado $M > 0$ primeiro note que

$$\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M\} = \{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M\, i.v.\} = \limsup_{n\to\infty}\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq M\}.$$

19 — Demonstração Probabilística do Teorema de Weierstrass

Utilize a desigualdade de Chebyshev para mostrar que para toda função continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^k \to f(x)$$

uniformemente em $x \in [0, 1]$ quando $n \to \infty$.

Dica: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes cada uma assumindo os valores 0 e 1 com probabilidade p e $1-p$ respectivamente. Seja $S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$ o número de caras em n lançamentos. Defina o polinômio $r_n(p) = \mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]$ e estude a expressão $|r_n(p) - f(p)|$.