Lista 5 - Probabilidade

Desigualdades e Produto

Esperança

1 — Dadas variáveis aleatórias X e Z independentes, cada uma seguindo a distribuição normal padrão, Deixe $a, b \in \mathbb{R}$ (não ambos nulos), e deixe

$$Y = aX + bZ.$$

a) Calcule $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

b) Mostre que $|\mathrm{Corr}(X, Y)| \leq 1$ nesse caso.

c) Dê condições necessárias e suficientes sobre os valores de a e b para que $\mathrm{Corr}(X, Y) = 1$.

d) Dê condições necessárias e suficientes sobre os valores de a e b tais que para que $\mathrm{Corr}(X, Y) = -1$.

2 — Problema do Pareamento Suponha que n cavalheiros saem para jantar e deixem seus chapéus no vestiário. Após o jantar (e vários copos de vinho) eles escolhem seus chapéus completamente aleatoriamente. Denote por X o número de senhores que peguem seus próprios chapéus. Encontre $\mathbf{E}[X]$ e $\mathbf{Var}[X]$. (esse problema já apareceu numa forma ligeiramente diferente na Lista 2)

3 — Dada uma variável aleatória X, então, para todo $\epsilon > 0$, existe uma variável aleatória limitada X_ϵ, tal que $\mathbf{P}(X \neq X_\epsilon) < \epsilon$

4 — Coletor de Cupom
Cada vez que se compra um saco de salgadinho, obtém-se como um bônus uma figurinha (escondida dentro da embalagem) de um jogador de futebol. Suponha que existam n imagens diferentes que são igualmente prováveis de estarem dentro de cada pacote.
Encontre o número esperado de pacotes que deve ser comprado para obter uma coleção completa de jogadores.

5 — Considere o espaço de probabilidade $\Omega = [-1/2, 1/2]$ com a medida normalizada de Lebesgue. Construa duas variáveis aleatórias X, Y em Ω que não são correlacionadas, mas não são independentes. (Sugestão: considere $X(x) = x$, $Y(x) = ax^2 + b$).

Desigualdades

6 — Uma moeda honesta é lançada de forma independente n vezes. Seja S_n o número de caras obtidas nesses n lançamentos. Use a desigualdade de Chebyshev para provar que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon\right) = 1$$

para todo $\epsilon > 0$.

7 — Sharpness da desigualdade de Chebyshev
Para cada $t \geq 1$, construa uma variável aleatória X com média μ e variância σ^2, e tal que a desigualdade de Chebyshev se torna uma igualdade:

$$\mathbf{P}(|X-\mu| \geq t\sigma) = \frac{1}{t^2}.$$

8 — Deixe X ser uma variável aleatória não-negativa, tal que $\mathbf{E}X$ existe.

a) Mostre através de um exemplo que $\mathbf{E}(X^2)$ pode não existir.

b) Considere o truncamento $X_n = \min(X, n)$. Prove que para todo $p > 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\, \mathbf{E}(X_n^2) < \infty.$$

c) Prove a propriedade anterior para $p = 2$.

9 — Deixe $X_1, \dots X_n$ serem variáveis aleatórias reais independentes e deixe $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ para $k = 1, \dots, n$. Mostre que para $t > 0$ a desigualdade de Etemadi é válida:

$$\mathbf{P}\left[\max_k |S_k| \geq t\right] \leq 3 \max_k \mathbf{P}\left[|Sk| \geq t/3\right].$$

Dica: Considere os conjuntos

$$A_j := \left\{\max_{1\leq k<j} |S_k| < 3r, |S_j| \geq 3r\right\}, \qquad j = 1, \dots, n$$

e observe que

$$\left\{\max_{1\leq j\leq n} |S_j| \geq 3r\right\} = \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

Produto

Suponha que $E \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Dado $x \in \Omega_1$ definimos a x-seção $E^x \subset \Omega_2$ como

$$E^x = \{y \in \Omega_2 : (x, y) \in E\}$$

10 — Se $E, F \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ e $x \in \Omega_1$, mostre que

a) $(E \cap F)^x = E_x \cap F_x$,

b) $(E^c)_x = (E_x)^c$,

c) $(\cup E_n)_x = \cup (E_n)^x$, onde (E_n) é uma sequência de subconjuntos $\Omega_1 \times \Omega_2$.

11 — Se μ_1 e μ_2 são medidas σ-finitas, mostre que a medida produto $\mu_1 \times \mu_2$ também é σ-finita.

12 — Mostre que $\mathcal{B}^{\mathbb{R}^d} = \bigotimes_{i=1}^{d} \mathcal{B}^{\mathbb{R}}$.

13 — Prove a existência da medida produto em $\mathbb{R}^2$ usando o Teorema da Extensão Compacta.

14 — Seja F uma distribuição em $\mathbb{R}$, então existe uma sequência de variáveis aleatórias independentes $X_1, \dots, X_n, \dots$ com distribuição F.

15 — Suponha que X seja uma variável exponencialmente distribuída com densidade

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

e Y uma variável aleatória independente que tenha distribuição uniforme $U(0, 1)$. Encontre a densidade da soma $Z = X + Y$.

16 — Produto de variáveis aleatórias independentes
Deixe $X, Y > 0$ serem variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição F e G.

a) Encontre a função de distribuição de XY.

b) Calcule a função de distribuição de XY se X e Y forem variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuídas em $[0, 1]$.

17 — Infinitas Moedas III

Use o Teorema de Kolmogorov para construir infinitas moedas honestas independentes. Ou seja, construa o espaço produto (X, A, μ) com $Y_i = \{0, 1\}$ com $i \in \mathbb{N}$. Logo X é o espaço das sequências tomando valores em $\{0, 1\}$. Defina a aplicação $\phi : X \to [0, 1]$ por

$$\phi(x) = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{8} + \dots$$

Mostre que ϕ é mensurável, tem uma inversa mensurável sobre o complemento de um conjunto de medida 0 em $[0, 1]$ e que ϕ^{-1} mapeia conjuntos mensuráveis de $[0, 1]$ para conjuntos mensuráveis no espaço do produto X tendo a mesma medida. Ou seja,

$$\mu\phi^{-1}(U) = m(U).$$

Nesse sentido, podemos dizer que a experiência de escolher um número aleatório entre 0 e 1 com a distribuição uniforme é equivalente à experiência (X, A, μ) que correspondente a uma sequência infinita de lançamentos independentes de moedas justas.

18 — Infinitas Moedas IV

Use o Teorema de Extensão de Bochner para construir infinitas moedas honestas independentes. Ou seja, construa o espaço produto (X, A, μ) com $Y_i = \{0, 1\}$ com $i \in \mathbb{N}$. Logo X é o espaço das sequências tomando valores em $[0, 1]$.

19 — Seja X uma variável aleatória não negativa. Prove que

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty \mathbf{P}(X(\omega) > x)\, dx.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_\Omega X d\mathbf{P} \\ &= \int_\Omega \int_0^\infty \mathbf{1}_{(0, X(\omega)]}(x)\, dx\, d\mathbf{P}(\omega).\end{aligned}$$

e use Fubini.

20 — Prove que, para qualquer variável aleatória X e $a > 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}(x < X < x + a)\, dx = a.$$

Dica: Use o anterior.