Lista 4 - Probabilidade

Esperança e Distribuição:
Uma Lista Socialista

Variáveis Aleatórias

1 — Lei zero-um de Kolmogorov para variáveis aleatórias
Suponha que $(X_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Então a σ-álgebra caudal T de $(\sigma\langle X_n\rangle : n \in \mathbb{N})$ contém somente eventos de probabilidade 0 ou 1.
Mais ainda, toda variável aleatória mensurável com respeito a T é constante quase certamente.
Dica: A parte inicial é análoga a demonstração do Teorema 0-1 de Kolmogorov. Para a parte final: se Y variável aleatória mensurável com respeito a T então $\mathbf{P}(Y \leq y)$ toma valores em $\{0, 1\}$, logo $\mathbf{P}(Y = c) = 1$, onde $c = \inf\{y : \mathbf{P}(Y \leq y) = 1\}$.

2 — Raio de Convergência Dado $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de medida e deixe $z_0, z_1, \ldots$ ser uma sequência infinita de variáveis aleatórias de Ω. Mostre que o raio de convergência R de uma série de potência aleatória

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k x^k$$

é uma função mensurável com respeito à $\mathcal{F}$.

3 — Usando o exercício anterior. Dado $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de medida e deixe $\{z_n, n \geq 1\}$ serem variáveis aleatórias independentes. Mostre que o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n x^n$ é constante com probabilidade 1, onde

$$R = \left(\limsup |X_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

Dica: Lei 0-1 de Kolmogorov.

4 — Sequências de 0 no lançamento de moedas
Considere a expansão diádica de $X \sim U(0, 1)$, e deixe l_n ser o número de zeros consecutivos do n-ésimo digito para frente. Ou seja $l_n = k$ se os dígitos $n, n+1, \ldots, n+k-1$ são todos zero. Em particular $l_n = 0$ se o n-ésimo digito for 1.

a) Prove que $\mathbf{P}(l_n = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$ para todo $k > 0$.
b) Prove que $\mathbf{P}(l_n = k \text{ i.v.}) = 1$ para todo k.
c) Prove que $\mathbf{P}(l_n = n \text{ i.v.}) = 0$

5 — Partição Enumerável (*Resnick*)Uma *partição enumerável* de Ω é uma família enumerável de conjuntos disjuntos tal que sua união é todo Ω. Dado $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma partição e deixe $\mathcal{F}$ ser a σ-álgebra gerada pelos conjuntos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$.

a) Descreva explicitamente os conjuntos em $\mathcal{F}$.
b) Dado $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Prove que X é mensurável com respeito a $\mathcal{F}$ se e somente se exis-

tem constantes c_n tais que

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 1_{E_n}$$

* **6 —** (*Durrett*) Dado X uma variável aleatória em Ω e $\sigma(X)$ a σ-álgebra gerada por X.
Dado Y uma variável aleatória em Ω. Prove que Y é mensurável com respeito a $\sigma(X)$ se e somente se existe uma função mensurável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $Y = f(X)$.
Dica: Reduza ao caso em que $Y \geq 0$.
Mostre que $\{\omega : m2^{-n} \leq Y(\omega) < (m+1)2^{-n}\} = X^{-1}(B_{n,m})$, onde $B_{n,m}$ é um conjunto de Borel em $\mathbb{R}$. Agora deixe $f_n(x) = m2^{-n}$ para $x \in B_{n,m}$.
Mostre que $f_n(x)$ converge pontualmente e deixe $f(x)$ ser seu limite.

Distribuição

7 — Variáveis Aleatórias Discretas Independentes

a) Mostre que se X e Y são variáveis aleatórias tomando valores inteiros independentes,então

$$\mathbf{P}(X+Y = n) = \sum_k \mathbf{P}(X = k)\, \mathbf{P}(Y = n-k).$$

b) Dadas X e Y variáveis aleatórias independentes de Poisson com parâmetros e μ respectivamente. Prove que $X + Y$ é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $+ \mu$.

c) Dadas X e Y variáveis aleatórias independentes de Bernoulli de parâmetros (n, p) e (m, p) respectivamente. Prove que $X + Y$ é uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro $(n + m, p)$.

8 — Variáveis aleatórias induzem medidas de probabilidade em $\mathbb{R}$
Considere uma variável aleatória X definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Prove que X induz uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}$ no seguinte sentido: Para todo conjunto de Borel A de $\mathbb{R}$, defina

$$\mathbf{P}(A) := \mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in A).$$

Prove que $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ é um espaço de probabilidade.

9 — Se uma função F satisfizer

- F é não decrescente e $0 \leq F(x) \leq 1$.
- $F(x) \to 0$ quando $x \to -\infty$ e $F(x) \to 1$ quando $x \to +\infty$.
- F é contínua a direita, ou seja

$$\lim_{y \to x_+} F(y) = F(x).$$

então F é a função de distribuição de alguma variável aleatória X.

10 — Infinitas Moedas II
Suponha que $Y_1, Y_2, \ldots$ é uma sequência infinita de variáveis aleatórias independentes, todas definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, tomando valores 0 e 1 com probabilidade $1/2$ cada. Mostre que $U := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} Y_k$ é uniformemente em $[0, 1]$. Dica: mostre que

$$\mathbf{P}[U \leq x] = \begin{cases} x & \text{quando } x \in [0,1]; \\ 1 & \text{quando } x > 1; \\ 0 & \text{quando } x < 0. \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ analisando $\mathbf{P}[U_n \leq x]$ quando $n \to \infty$ onde $U_n := \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} Y_k$.

*** 11 — Outra construção da Distribuição de Cantor**

Considere Y_n como no problema anterior. Defina

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Y_n}{3^n}$$

a) Prove que a função de distribuição F_Y é contínua.

b) Prove que F_Y é diferenciável q.c. com derivada igual a 0 q.c. Dica Prove que F_Y é constante no complemento do conjunto de Cantor.

c) Dado μ_Y a distribuição de Y. E m a medida de Lebesgue na reta real. Prove que μ_Y e m são mutualmente singulares. Ou seja que existe um conjunto de Borel A com $m(A) = 0$ e $\mu_Y(A^c) = 0$.

Definição: Suponha X e Y duas variáveis aleatórias, não necessariamente definidas no mesmo espaço de probabilidade. A variável aleatória Y é dita **estocasticamente maior** que X se $\mathbf{P}[X \leq x] \geq \mathbf{P}[Y \leq x]$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

12 — Suponha X e Y duas variáveis aleatórias e que Y é estocasticamente maior que X. Mostre que existem variáveis aleatórias X^* e Y^* definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tais que $X^* \sim X$, $Y^* \sim Y$ e $X^*(\omega) \leq Y^*(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

Esperança

13 — Mostre que para variáveis aleatórias discretas,

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{P}(x = x_k), \tag{1}$$

se a série é absolutamente convergente

14 — Dê exemplos de variáveis aleatórias X e Y definas em $[0, 1]$ com a medida de Lebesque tal que $\mathbf{P}(X > Y) > 1/2$, mas $\mathbf{E}(X) < \mathbf{E}(Y)$.

15 — Suponha que $X_1, X_2, \ldots$ é uma sequência de variáveis independentes em (Ω, F, P). Mostre que as duas famílias $X_1, X_3, X_5, \ldots$ e $X_2, X_4, X_6, \ldots$ são independentes.

16 — Deixe $X_1, X_2, \ldots$ serem variáveis aleatórias i.i.d. com média μ e variância σ^2 e deixe ser uma variável aleatória tomando valores nos inteiros com média m e variância ν, com N independente de todas as X_i. Deixe $S = X_1 + ... + X_N = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbf{1}_{N>i}$.
Calcule $\mathbf{Var}(S)$.

17 — Prove a Desigualdade de Cauchy-Schwarz: dadas duas variáveis aleatórias X e Y, temos

$$|\mathbf{E}XY| \leq \sqrt{\mathbf{E}[X^2]\mathbf{E}[Y^2]}, \tag{2}$$

e a igualdade ocorre se e somente se $X = \alpha Y$, para alguma constante $\alpha \in \mathbb{R}$.