Lista 3 - Probabilidade

Independência e Variáveis Aleatórias

Aplicações do Teorema de Extensão de Caratheodory

1 — Medida de Lebesgue
Faça a construção da Medida de Lebesgue na reta usando o teorema da Classe Compacta.

2 — Infinitas Moedas I
Dado $\Omega = \{0,1\}^\infty$ ser o espaço das sequências $0-1$, e deixe $\mathcal{F}_0$ denotar a álgebra da união finita de conjuntos da forma
$A_n(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega : \omega_1 = \epsilon_1, \dots \omega_n = \epsilon_n\}$.
Fixe $p \in [0,1]$ e defina

$$\mathbf{P}_p(A_n(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)) = p^{\sum \epsilon_i}(1-p)^{n-\sum \epsilon_i}$$

a) Mostre que a extensão naturalmente aditiva de $\mathbf{P}_p$ para $\mathcal{F}_0$ define uma medida na álgebra $\mathcal{F}_0$. [Dica: pelo teorema de Tychonov da topologia, o conjunto Ω é compacto para a topologia do produto, verifique que os conjuntos $C \subset \mathcal{F}_0$ são abertos e fechados na topologia produto, de modo que, por compacidade, qualquer união disjunta enumerável pertencente a $\mathcal{F}_0$ deve ser uma união finita.]

b) Mostre que $\mathbf{P}_p$ tem uma única extensão para $\sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$. Esta probabilidade $\mathbf{P}_p$ define a probabilidade do produto infinito. [Dica: aplique o Teorema de extensão de Carathéodory.]

c) Mostre que as funções projeções de coordenadas

$$X_n(\omega) = \omega_n, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2,)$$

para $n = 1, \dots$ definem uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. de Bernoulli.

3 — Percolação de Elos
Para um gráfico (infinito) $G = (V, E)$, tomamos:

- $\Omega = \{0,1\}^{|E|}$ como o conjunto de todos os arranjos de arestas abertas, onde 0 representa uma aresta fechada e 1 representa uma aresta aberta;
- Σ como a σ-algebra em Ω gerado pelos cilindros

$$C(F,\sigma) = \{\omega \in \Omega \mid \omega_f = \sigma_f \text{ para } f \in F\},$$

$$F \subset E, |F| < \infty \text{ e } \sigma = \{0,1\}^{|F|};$$

- $\mathbf{P}$ como a medida de probabilidade em Σ induzida por

$$\mathbf{P}_p(C(F,\sigma)) = \left(\prod_{\substack{f\in F\\ \sigma_f=1}} p\right)\left(\prod_{\substack{f\in F\\ \sigma_f=0}} 1-p\right).$$

a) Mostre que a extensão naturalmente aditiva de $\mathbf{P}_p$ para $\mathcal{F}_0$ define uma medida na álgebra $\mathcal{F}_0$.

b) Mostre que $\mathbf{P}_p$ tem uma única extensão para $\sigma < \mathcal{F}_0 >$.

Independência

4 — Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ um espaço de probabilidade e dado B com $P(B) > 0$,mostre que $(B, \mathcal{F} \cap B, \mathbf{P}(\Delta|B))$ é um espaço de probabilidade.

5 — Deixe Ω ser os inteiros $\{1, 2, \ldots, 9\}$ com probabilidade de $1/9$ cada. Mostre que os eventos $\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}$ são dois a dois independentes, mas a família não é independente.

6 — Construa um exemplo de três eventos A, B, C que não são independentes mas que satisfazem $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.

7 — Dado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{K}$ um conjunto de índices, mostre que

1. **Subclasses** Se $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{B}_k \subset \mathcal{F}$para todo $k \in \mathcal{K}$ e $\{\mathcal{B}_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ são famílias independentes então $\{\mathcal{A}_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ são famílias independentes.
2. **Acréscimo** $\{\mathcal{A}_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ são famílias independentes se e somente se $\{\mathcal{A}_k \cup \{\Omega\}\}_{k \in \mathcal{K}}$ são famílias independentes.
3. **Produto Simplificado** se $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ são famílias de conjuntos em $\mathcal{F}$ e $\Omega \in \mathcal{A}_k$ para cada k, então $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ são famílias independentes se e somente se

8 — Considere uma família de eventos independentes $\{A_{k \in \mathcal{K}}\}$. Se $I \cap J = \emptyset$, mostre que $\sigma\langle A_k : k \in I\rangle$ e $\sigma\langle A_k : k \in J\rangle$ são independentes.

9 — Dado uma família finita de eventos $\{A_i\}$ que são independentes mostre que o conjunto $\{A_i^C\}$ que é o conjunto de complementos dos eventos originais, também é independente.

10 — Construa um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbf{P})$ e k eventos,cada um com probabilidade $1/2$, que são $k-1$ independentes entre si, mas não são independentes. Escolha o espaço amostral tão pequeno quanto possível.

11 — Uma bolsa contém uma bola preta e m bolas brancas. Uma bola é retirada aleatoriamente. Se ela for preta, ele é retornada para o saco. Se for branca, ela e uma bola branca adicional são devolvidas à bolsa. Deixe A_n indicar o evento em que a bola negra não é retirada nas primeiras n tentativas . Discuta a reciproca do Lema de Borel-Cantelli com referência aos eventos A_n.

12 — Dados $A_n, n \geq 1$, conjuntos de Borel no espaço de Lebesgue $([0, 1], \mathcal{F}(0, 1), \mu)$. Mostre que se existe $Y > 0$, tal que $\mu(A_n) \geq Y$ para todo n, então existe pelo menos um ponto que pertence a infinitos conjuntos A_n

13 —

a) Para todo $k = 1, \ldots, n$ deixe $\mathcal{P}_k$ ser uma partição de Ω em conjuntos enumeráveis de $\mathcal{F}$. Mostre que as σ-álgebras $\sigma\langle\mathcal{P}_1\rangle, \ldots, \sigma\langle\mathcal{P}_n\rangle$ são independentes se e somente se (1) vale para cada escolha de A_k em $\mathcal{P}_k$ $k = 1, \ldots, n$.

b) Mostre que os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ são independentes se e somente se

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)$$

para toda escolha de B_k como A_k ou A_k^c para $k = 1, \ldots, n$.

14 — Deixe $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ serem π-sistemas de conjuntos em $\mathcal{F}$ tais que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) \tag{1}$$

para toda escolha de $A_k \in \mathcal{A}_k$ para $k = 1, \ldots, n$.

a) Mostre usando um exemplo simples que $\mathcal{A}_k$'s não precisam ser independentes.
b) Mostre que $\mathcal{A}_k$'s serão independentes se para todo k, Ω é união enumerável de conjuntos em $\mathcal{A}_k$.
Dica: Inclusão- Exclusão

15 — Dados $A_1, A_2, \ldots$. Mostre que $\mathbf{P}(A_n \text{ i.v.}_n) = 1$ se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n|A)$ diverge para todo A de probabilidade não nula
Dica: Mostre que $\mathbf{P}(A_n \text{ i.v.}_n) < 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n|A) < \infty$ para algum conjunto A com $\mathbf{P}(A) > 0$.

Variáveis Aleatórias

16 — Mostre que a composta de funções mensuráveis é mensurável

17 — Operações com Variáveis Aleatórias
Mostre que se X, Y são variáveis aleatórias em $(\Omega, F, \mathbf{P})$ então também são variáveis aleatórias:

a) $|X|$
b) $X + Y$
c) $X \cdot Y$
d) $\max(X, Y)$
e) $\min(X, Y)$

18 — Dado X uma variável aleatória tal que $\mathbf{P}(X > 0) > 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{P}(X > \delta) > 0$

19 — Amostragem de uma variável aleatória exponencial
Encontre um algoritmo para produzir uma variável aleatória com distribuição $\mathrm{Exp}(\lambda)$ usando um gerador de números aleatórios que produz números aleatórios uniformes em $(0, 1)$. Em outras palavras, se $U \sim U(0, 1)$, encontre uma função $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ tal que o aleatório variável $X = g(U)$ tem distribuição $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

20 — A Propriedade de Falta de Memória

a) Dizemos que uma variável não negativa $X \geq 0$ tem a propriedade de perda de memória se $\mathbf{P}(X \geq t|X \geq s) = \mathbf{P}(X \geq t \geq s)$ para todo $0 < s < t$.
b) Mostre que as variáveis aleatórias exponenciais têm a propriedade da memória de falta.
c) Prove que qualquer variável aleatória não-negativa que tenha a propriedade falta de memória tenha distribuição exponencial para algum parâmetro $\lambda > 0$. (Isso é mais fácil se você assumir que a função $G(x) = \mathbf{P}(X \geq x)$ é diferenciável em $[0, \infty)$, assim você pode fazer essa suposição se você não conseguir um argumento mais geral).

21 — Dado uma variável aleatória X que é independente de si própria. Mostre que X é constante com probabilidade 1.

22 — Considere duas funções mensuráveis $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prove que se X_1 e X_2 são independentes, então $Y_1 = f_1(X_1)$ e $Y_2 = f_2(X_2)$ também são independentes.

23 — Dado $\epsilon > 0$, e deixe X_i ser uma sequência não negativa de variáveis aleatórias independentes tais que $\mathbf{P}(X_i > \delta) > \epsilon$ para todo i. Prove que com probabilidade 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \infty$$