Lista 2 - Probabilidade

Medidas e Probabilidade

Borelianos

1 — Todos os subconjuntos contáveis, co-contáveis (i.e. complementos de conjuntos contáveis) e perfeitos de $(0,1]$ estão em $\mathcal{B}((0,1])$. Em particular, o conjunto dos números irracionais em $(0,1]$ é um conjunto de Borel.

2 — Dado $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}) := f\langle(-\infty, a] : -\infty < a < \infty\rangle$ a álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Deixe P uma probabilidade finitamente aditiva em $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$. Mostre que P é uma medida de probabilidade em $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ se e somente se a função definida por $F(x) := P((-\infty, x])$ é não decrescente, continua a direita e satisfaz $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

3 — Seja Ω um espaço métrico com distância d. Ω é dito **separável** se existe um conjunto enumerável $\Omega_0 \subset \Omega$ que é denso em Ω (i.e., todo ponto em Ω é limite de uma sequência de pontos em Ω_0).

a) Mostre que $\sigma\langle\text{bolas abertas em } \Omega\rangle \subset \mathcal{B}(\Omega)$.

b) Mostre que $\sigma\langle\text{bolas abertas em } \Omega\rangle = \mathcal{B}(\Omega)$ se Ω é separável.

c) Mostre que $\Omega = \mathbb{R}$ é separável com a métrica usual

d) Conclua que $\sigma\langle\text{bolas abertas em } \mathbb{R}\rangle = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Medidas

4 — Suponha que μ_1 e μ_2 são medidas em $\sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$ geradas pela classe $\mathcal{F}_0$. Suponha também que a desigualdade

$$\mu_1(A) \le \mu_2(A) \tag{1}$$

é válida para todo A em $\mathcal{F}_0$.

a) Mostre que se $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra e μ_1 e μ_2 são σ-finitas em $\mathcal{F}_0$, então (1) vale para todo $A \in \sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$.
(Dica: primeiramente trate o caso em que μ_2 é finita.)

b) Mostre através de um exemplo que (1) pode não ser verdade para algum $A \in \sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$ se:
  a) $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra mas μ_1 e μ_2 não são σ-finita em $\mathcal{F}_0$;
  b) Se μ_1 e μ_2 são σ-finitas em $\mathcal{F}_0$, mas $\mathcal{F}_0$ é somente um π-sistema.

5 — Suponha que $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra, μ é uma medida em $\sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$ e μ é σ-finita em $\mathcal{F}_0$.

a) Suponha $B \in \sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$ e $\epsilon > 0$. Mostre que existe uma sequência disjunta de $\mathcal{F}_0$-conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ tais que $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - B\right) \le \epsilon$.

b) Suponha $B \in \sigma\langle\mathcal{F}_0\rangle$, $\mu(B) < \infty$ e $\epsilon > 0$. Mostre que existe um $\mathcal{F}_0$-conjunto A tal que $\mu(A \triangle B) \le \epsilon$.

c) Mostre através de um exemplo que a conclusão anterior pode ser falsa se B tiver uma medida infinita.

6 — O seguinte exercício mostra que não importa em qual ordem somamos um número infinito de termos positivos. Isso é útil para mostrar rigorosamente os axiomas de medida para a medida de contagem em qualquer Ω. Observe que, se houver termos negativos, a ordem é importante.
Dado I um conjunto infinito e seja f uma função de I para $[0, \infty]$. A soma de f sobre I é definida como

$$\sum_{i \in I} f(i) := \sup\Big\{\sum_{i \in H} f(i) : \ H \subset I, H \text{ é finito}\Big\}.$$

Mostre que

a) para toda partição $I = \bigcup_{k \in K} I_k$ de I em subconjuntos disjuntos não-vazios I_k,

$$\sum_{i \in I} f(i) = \sum_{k \in K}\Big(\sum_{i \in I_k} f(i)\Big)$$

b) Se I é enumerável, então

$$\sum_{i \in I} f(i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n} f(i_m)$$

para toda enumeração $i_1, i_2, \ldots$ dos pontos em I.

c) Prove que

$$\mu(A) := \sum_{a \in A} f(a)\,, \forall A \subseteq X$$

definida acima é uma medida

Probabilidade

7 — (sub-additividade enumerável) Mostre que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

8 — Prove que a continuidade da medida de probabilidade. Dados $A_1, A_2, \ldots$ eventos, então

a) Se $A_n \nearrow A$, então $\mathbf{P}(A_n) \nearrow \mathbf{P}(A)$ quando $n \to \infty$.

b) Se $A_n \searrow A$, então $\mathbf{P}(A_n) \searrow \mathbf{P}(A)$ quando $n \to \infty$.

c) $\mathbf{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbf{P}(A_n) \leq \limsup \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(\limsup A_n)$.

d) $A_n \to A$ implica que $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$ as $n \to \infty$.

9 — Considere um modelo probabilístico cujo espaço amostral é a reta real. Mostre que

a) $\mathbf{P}\left([0, \infty)\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left([0, n]\right)$

b) $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left([n, \infty)\right) = 0$.

10 — (Uma condição insuficiente) Deixe $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, e deixe $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

a) Mostre que a σ-algebra $\mathcal{F}$ gerada por A é o conjunto das partes 2^{Ω}.

b) Mostre que existem duas medidas de probabilidade $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ em $(\Omega, \mathcal{F})$, tal que $\mathbf{P}_1(E) = \mathbf{P}_2(E)$ para qualquer $E \in A$, mas $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2$. Este problema mostra que o fato de que duas medidas de probabilidade coincidem com uma família geradora de uma σ-álgebra não garante que elas sejam iguais. No entanto, isso é verdade se adicionarmos a suposição de que a família geradora A é fechada sob interseções finitas.

11 — Seja $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} =$todos os conjuntos tais que A ou A^c são enumeráveis, com $\mathbf{P}(A) = 0$ no primeiro caso e $= 1$ no segundo. Mostre que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ é um espaço de probabilidade

12 — Desigualdade de Bonferroni
Definindo

$$S_1 := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i),$$

e

$$S_2 := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j),$$

bem como

$$S_k := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

para todos os números inteiros de k em $\{3, \ldots, n\}$. Então, para k ímpar

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j$$

e para $k > 2$ par

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j.$$

(Se tiver com muita preguiça prove apenas para $k = 2, 3$.)

Importante: Para os próximos exercícios defina claramente o espaço de probabilidade!

13 — Problema do Pareamento
No final de um dia agitado, os pais chegam ao jardim de infância para pegar seus filhos. Cada pai escolhe uma criança para levar a casa uniformemente ao acaso. Use o fórmula de inclusão-exclusão para mostrar que a probabilidade de pelo menos um pai escolhe seu próprio filho é igual a

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

E que essa probabilidade converge a $1 - 1/e$ quando $n \to \infty$

14 — Qual é a probabilidade de que um ponto escolhido aleatoriamente no interior de um triângulo equilátero esteja mais perto do centro do que de suas bordas?

15 — Agulhas de Buffon
Deixe um plano horizontal ser dividido em faixa por uma série de linhas paralelas a distância fixa d, como as tábuas do chão.
Deixe uma agulha, cujo comprimento seja igual à distância entre as linhas paralelas, ser jogada no plano aleatoriamente.

a) Defina precisamente o espaço de Probabilidade.
b) Prove que a probabilidade da agulha não interceptar uma das linhas paralelas é $\frac{2}{\pi}$.

Moedas I

16 — O conjunto de números normais e anormais está em $\mathcal{B}((0, 1])$.

17 — Para todo número $\omega \in (0, 1]$, deixe $d_k(\omega)$ denotar o k-ésimo digito da representação de ω. Seja $z_k(\omega) := 2d_k(\omega) - 1$ e

$$s_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} z_k(\omega) \equiv \text{excesso de 1s nos n primeiros dígitos.}$$

Mostre que

$$M(t) := \int_0^1 e^{ts_n(\omega)}\, d\omega = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n \tag{2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Diferenciando com respeito à t, mostre que $\int_0^1 s_n(\omega)\, d\omega = M'(0) = 0$ e $\int_0^1 s_n^2(\omega)\, d\omega = M''(0) = n$.

A ideia é dividir a integral $\int_0^1$ nos intervalos diádicos da forma $(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$

18 — Mostre que

$$P\left[|s_n/n| \geq \epsilon\right] \leq 2e^{-n\epsilon^2/2}$$

para todo $\epsilon > 0$.
Dica : Use (2) e a desigualdade $(e^x + e^{-x})/2 \leq \exp(x^2/2)$ que é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$.