Lista 4 - Geometria Não Euclideana

Modelos e Grupo de Moebius

"For fifteen days I strove to prove that there could not be any functions like those I have since called Fuchsian functions . . .. One evening, contrary to my custom, I drank black coffee and could not sleep. Ideas rose in crowds; I felt them collide until pairs interlocked, so to speak, making a stable combination. By the next morning I had established the existence of a class of Fuchsian functions, those which come from the hypergeometric series: I had only to write out the results, which took but a few hours." (Poincaré 1907)

1 Grupos de Moebius

1 — 1pt Mostre que:

a) $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$

b) $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$

c) $\overline{\frac{a}{b}} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$

d) $\overline{\overline{a}} = a$

e) $a + \overline{a} = 2\Re a$

f) $a - \overline{a} = 2\Im a$

2 — 1pt Mostre que a função:

$$J(x) = \frac{1}{z} \text{ para } z \neq 0 \text{ e } J(\infty) = 0$$

é continua em $\overline{\mathbb{C}}$

3 — 0.5pt Mostre que um círculo em $\overline{\mathbb{C}}$ pode ser escrito na forma:

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$$

com $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{C}$ com $\alpha \neq 0$

4 — 0.5pt Mostre que $J(z)$ leva círculos em círculos.

5 — 0.5pt Mostre que $f(z) = az + b$ leva círculos em círculos.

6 — 0.3pt Quando que $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ é invertível?
Grupo de Moebius $\mathrm{Mob}^+ = \{\frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc \neq 0\}$

7 — 0.5pt Mostre que uma transformação de Moebius pode ser escrita como composição de lineares e $J(z)$.

8 — 0.3pt Mostre que uma transformação de Moebius leva círculos em círculos.

9 — 0.5pt Dados três pontos w_1, w_2, w_3 encontre uma transformação de Moebius que tal que $m(w_1) = 0$, $m(w_2) = 1$ e $m(w_3) = \infty$.

10 — 0.5pt Mostre que Mob^+ age transitivamente no conjunto de círculos de $\overline{\mathbb{C}}$.
Produto Cruzado Dados $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ definimos o produto cruzado de z_1, z_2, z_3, z_4 como:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \left(\frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2}\right)\left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$$

11 — 1pt Mostre que $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ estão num círculo se e somente se $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ é real.

12 — 0.2pt Determine a condição sobre s para que os pontos $2 + 3i, -2i, 1 - i, s$ estejam num círculo.

13 — 0.5pt Mostre que Mob^+ é um grupo em relação a operação de composição.

2 Modelos da Geometria Hiperbólica

14 — 1pt Mostre que o eixo y é uma geodésica para o modelo do semi-plano.

15 — 0.75pt Calcule a distância entre os pontos ai e bi (para $a, b \in \mathbb{R}$) para o modelo do semiplano.

16 — 1pt Mostre que o segmento do eixo y contido dentro do disco unitário é uma geodésica para o modelo do disco.

17 — 0.75pt Calcule a distância entre os pontos ai e bi (para $a, b \in \mathbb{R}$) para o modelo do disco.

18 — 0.75pt Supondo conhecido que as geodésicas de $\mathbb{H}^2$ são retas e semi-círculos perpendiculares ao eixo y. Mostre que dados dois pontos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ existe uma única geodésica passando por esses pontos.