

Lista 3 - Geometria Não Euclideana

Geometria Não Euclideana Axiomática

”Out of nothing I have created a strange new universe”.

János Bolyai

1 — 0.75pt Dado um ponto A e uma reta orientada l com sistema de coordenadas x e seja Q o pé da perpendicular de A . Mostre que o ângulo de paralelismo α_0 é:

$$\alpha_0 = \lim_{x(P) \rightarrow \infty} \angle QAx(P)$$

2 — 0.75pt Mostre que o ângulo de paralelismo de um ponto em relação a uma reta só depende do ponto.

3 — 0.75pt Mostre que na geometria não euclideana existe um triângulo com defeito não nulo.

4 — 0.75pt Dado um ponto P e um ponto no infinito η mostre que existe uma única reta passando por P e η .

5 — 0.75pt Dados dois pontos no infinito η e ξ mostre que existe uma única reta passando por ξ e η .

6 — 1pt Mostre que se uma isometria fixa um ponto Z ela é a identidade, ou uma rotação em torno de Z ou uma reflexão numa reta que passa por Z .

7 — 1pt Mostre que uma isometria que deixa uma reta invariante, então é ou uma translação ou uma translação seguida de uma reflexão nessa reta.

8 — 1pt Dadas duas retas l e n que se interceptam num ponto. Determine o ângulo da rotação $R_l \circ R_n$.

9 — 1.5pt Mostre que duas retas ultraparalelas possuem uma única reta perpendicular em comum.

10 — 1.5pt Dadas duas retas não perpendiculares existe uma reta que é perpendicular a uma e paralela a outra.

11 — 1.5pt Mostre que o produto das reflexões nos pontos médios de um quadrilátero (na ordem natural) é uma reflexão pelo defeito angular do quadrilátero.

12 — 3pt Mostre que qualquer polígono cuja soma dos ângulos é um submúltiplo de 2π pode ser repetido através de reflexões nos pontos médios de seus lados de modo a cobrir todo o plano.

13 — 1.5pt Mostre que na geometria não Euclideana retângulos não existem.

14 — 1.5pt Mostre que na geometria Euclideana, dois triângulos com os ângulos dois a dois congruentes são congruentes. (Caso AAA é válido na geometria hiperbólica)

15 — 1.5pt Mostre que o ângulo de paralelismo é agudo mostrando que $\Pi(PQ) = \pi/2$ então existe uma única reta paralela a l contradizendo o axioma 7b.

16 — 1.5pt Assuma que MM' é a perpendicular comum de l e l' . Dado A e B pontos em l tal que A está entre M e B . E faça as perpendiculares AA' e BB' para l' . Prove que $AA' < BB'$.

17 — Dado um triângulo $\triangle ABC$ e sejam L, M, N os pontos médios dos lados AB, BC e AC respectivamente. Mostre que $\triangle AMN$ não é congruente a $\triangle ABC$