

# Lista 3 - Geometria Não Euclideana

## Geometria Não Euclideana Axiomática

”Out of nothing I have created a strange new universe”.

János Bolyai

**1 — 0.75pt** Dado um ponto  $A$  e uma reta orientada  $l$  com sistema de coordenadas  $x$  e seja  $Q$  o pé da perpendicular de  $A$ . Mostre que o ângulo de paralelismo  $\alpha_0$  é:

$$\alpha_0 = \lim_{x(P) \rightarrow \infty} \angle QAx(P)$$

**2 — 0.75pt** Mostre que o ângulo de paralelismo de um ponto em relação a uma reta só depende do ponto.

**3 — 0.75pt** Mostre que na geometria não euclideana existe um triângulo com defeito não nulo.

**4 — 0.75pt** Dado um ponto  $P$  e um ponto no infinito  $\eta$  mostre que existe uma única reta passando por  $P$  e  $\eta$ .

**5 — 0.75pt** Dados dois pontos no infinito  $\eta$  e  $\xi$  mostre que existe uma única reta passando por  $\xi$  e  $\eta$ .

**6 — 1pt** Mostre que se uma isometria fixa um ponto  $Z$  ela é a identidade, ou uma rotação em torno de  $Z$  ou uma reflexão numa reta que passa por  $Z$ .

**7 — 1pt** Mostre que uma isometria que deixa uma reta invariante, então é ou uma translação ou uma translação seguida de uma reflexão nessa reta.

**8 — 1pt** Dadas duas retas  $l$  e  $n$  que se interceptam num ponto. Determine o ângulo da rotação  $R_l \circ R_n$ .

**9** — **1.5pt** Mostre que duas retas ultraparalelas possuem uma única reta perpendicular em comum.

**10** — **1.5pt** Dadas duas retas não perpendiculares existe uma reta que é perpendicular a uma e paralela a outra.

**11** — **1.5pt** Mostre que o produto das reflexões nos pontos médios de um quadrilátero (na ordem natural) é uma reflexão pelo defeito angular do quadrilátero.

**12** — **3pt** Mostre que qualquer polígono cuja soma dos ângulos é um submúltiplo de  $2\pi$  pode ser repetido através de reflexões nos pontos médios de seus lados de modo a cobrir todo o plano.

**13** — **1.5pt** Mostre que na geometria não Euclideana retângulos não existem.

**14** — **1.5pt** Mostre que na geometria Euclideana, dois triângulos com os ângulos dois a dois congruentes são congruentes. (Caso AAA é válido na geometria hiperbólica)

**15** — **1.5pt** Mostre que o ângulo de paralelismo é agudo mostrando que  $\Pi(PQ) = \pi/2$  então existe uma única reta paralela a  $l$  contradizendo o axioma 7b.

**16** — **1.5pt** Assuma que  $MM'$  é a perpendicular comum de  $l$  e  $l'$ . Dado  $A$  e  $B$  pontos em  $l$  tal que  $A$  está entre  $M$  e  $B$ . E faça as perpendiculares  $AA'$  e  $BB'$  para  $l'$ . Prove que  $AA' < BB'$ .

**17** — Dado um triângulo  $\triangle ABC$  e sejam  $L, M, N$  os pontos médios dos lados  $AB, BC$  e  $AC$  respectivamente. Mostre que  $\triangle AMN$  não é congruente a  $\triangle ABC$