

Geometria Neutra e uma Pitada de Geometria Hiperbólica

Notas de Aula

Disciplina MA520 - Geometria Euclidiana Plana

1 Semestre de 2007

IMECC/UNICAMP

Marcelo Firer

Abril de 2007

1 Introdução

O surgimento da geometria hiperbólica é com certeza um dos capítulos mais interessantes da história da matemática. Durante séculos a matemática (e os matemáticos) ficaram intrigados com o enunciado do 5º Postulado de Euclides: *”Se uma linha reta atingindo outras duas linhas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado da linha menores que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se estendidas indefinidamente, se encontram daquele lado da linha no qual os ângulos são menores do que dois ângulos retos”*. Tanto devido ao contraste deste enunciado original com a clareza com que foram enunciados os outros postulados, como devido ao fato de Euclides evitar o máximo possível fazer uso deste postulado na demonstração das proposições, suspeitou-se durante dois mil anos da independência deste postulado, ou seja, imaginava-se que este fosse apenas uma proposição que pudesse ser demonstrada utilizando-se os outros postulados.

Ao longo dos séculos, diversos enunciados equivalentes ao 5º. Postulado foram feitos, o mais popular de todos sendo o de John Fairplay (1748-1819): *Por um ponto não contido em uma reta dada, pode ser traçada uma e apenas uma reta paralela a reta dada*. Este enunciado acabou batizando o 5º. Postulado com o nome de *Postulado das Paralelas*.

Durante o século 18 diversos matemáticos, tais como Girolomo Saccheri e Johann Heinrich Lambert tentaram demonstrar o 5º. postulado. Apesar de não serem bem sucedidos em seu intento (o que não nos surpreende hoje em dia, pois sabemos ser um postulado realmente independente), conseguiram diversos e importantes avanços. Foi provado, por exemplo, que sem o Postulado das

Paralelas, obtém-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior ou menor do que π . A falta ou excesso (a diferença entre a soma dos ângulos internos e π) depende da área do referido triângulo, de modo semelhante ao que ocorre em uma esfera.

Apenas na primeira metade do século 19, começou-se a suspeitar que o Postulado das Paralelas fosse realmente independente dos demais da independência do Postulado das Paralelas. Matemáticos como Carl Friedrich Gauss (1777-1855), János Bolyai (1802-1860) e Nicolai Lobatchevsky (1793-1856) trataram da questão ao considerar três situações distintas: Por um ponto não contido em uma reta dada, passa *mais de uma*, *apenas uma* ou *nenhuma* reta paralela a reta dada. Por suspeitarem da independência do Postulado das Paralelas, ou seja, de que sua negação poderia gerar uma geometria consistente, sem contradições, desenvolveram de forma axiomática um estudo amplo e detalhado de uma geometria que assumia a existência de mais de uma reta paralela (a terceira hipótese, da inexistência de retas paralelas pode ser descartada, conforme veremos mais adiante), criando o que veio a ser chamada com o tempo de *Geometria de Lobatchevsky* ou *Geometria Hiperbólica*. No entanto, as dúvidas referentes a consistência desta nova geometria, só foram dirimidas no final do século, quando matemáticos como Eugenio Beltrami, Henri Poincaré e Felix Klein criaram modelos euclidianos para esta geometria. A criação de modelos euclidianos para a geometria hiperbólica resolve a questão da consistência desta geometria, pois qualquer eventual contradição a ser encontrada implicaria em uma contradição existente na geometria euclidiana, ou seja, as geometrias hiperbólica e euclidiana tem o mesmo grau de consistência (uma descrição detalhada sobre a equivalência entre a consistência destas duas geometrias pode ser encontrada em [Po1]).

Este texto está dividido em três seções. Na primeira delas apresentamos os axiomas da geometria neutra e alguns resultados decorrentes destes axiomas. Por geometria neutra entendemos todos os resultados e construções que podem ser feitos prescindindo de qualquer versão do Postulado das Paralelas, seja em sua versão euclidiana ou em sua versão hiperbólica. Os axiomas que iremos apresentar são equivalentes, e bastante similares aqueles adotados por David Hilbert em seu famoso *Grundlagen der Geometrie* ([Hi, edição espanhola]). Na segunda seção introduzimos o Axioma Hiperbólico das Paralelas e desenvolvemos uma série de resultados que podem a primeira vista causar certa estranheza, enfatizando a importância do Axioma das Paralelas. Não se preocupem com esta sensação, inúmeros matemáticos, incluindo C.F. Gauss, aparentemente passaram por este mesmo processo. Aos leitores interessados em se aprofundar no estudo axiomático de geometria hiperbólica, sugerimos os livros de Roberto Bonola ([Bo]) e Luiz Fernando C. da Rocha ([Ro]). Em particular, citamos o excelente texto de Ramsay e Richtmyer [RaRi], que trata da questão de consistência e categoria dos axiomas hiperbólicos. Na terceira e última seção apresentamos dois modelos para a geometria hiperbólica, conhecidos como *disco de Poincaré* e o

semi-plano de Lobatchevsky. Realçamos que a palavra modelo é empregada aqui no sentido pleno do termo, ou seja: qualquer afirmação que seja provada a partir de algum modelo, pode ser demonstrada a partir do corpo de axiomas da teoria. Em outras palavras, sob o ponto de vista de conteúdos, nada perdemos ao trabalharmos diretamente com os modelos, sem fazermos menção à estrutura axiomática. A grande vantagem de se trabalhar com modelos é a possibilidade de desenvolvermos uma percepção bastante refinada sobre a geometria em questão. Os modelos exercem para a geometria a mesma função que um bom atlas exerce para a geografia: apesar de os mapas apresentarem distorções, estas são quantificáveis e razoavelmente "bem comportadas", de modo que podemos nos situar de forma bastante satisfatória apenas através de nossos mapas. Mais detalhes sobre geometria hiperbólica, explorando os modelos de forma exaustiva, podem ser encontrados nos textos [Be] ou [Fi].

2 Geometria Neutra

Iremos apresentar um conjunto de axiomas para a geometria plana equivalente ao sistema proposto por Hilbert. Assumimos o conjunto dos números reais \mathbb{R} , um corpo completo ordenado. Conforme já mencionamos, as geometrias euclidiana e a hiperbólica diferem apenas no Postulado das Paralelas (e nos resultados que decorrem deste). Se considerarmos apenas os resultados que independem deste postulado, temos o que costumamos chamar de geometria neutra. As propriedades e resultados da geometria neutra são exatamente aqueles que são válidos tanto para o plano euclidiano como para o hiperbólico.

Denotaremos o plano euclidiano por \mathbb{E}^2 e o hiperbólico por \mathbb{H}^2 . Quando não for importante distingui-los, ou seja, quando estivermos tratando de resultados da geometria neutra, adotaremos a notação \mathbb{P} .

Os elementos de \mathbb{P} são chamados de *pontos* e denotados por A, B, C, \dots . Certos subconjuntos de \mathbb{P} são chamados de retas, denotadas por l, m, n, \dots . Dizemos que l passa por A se $A \in l$.

Axioma .1 *Dados dois pontos distintos $A, B \in \mathbb{P}$, existe uma e apenas uma reta, denotada por \overleftrightarrow{AB} , passando por ambos os pontos.*

Axioma .2 *Toda reta possui ao menos dois pontos.*

Axioma .3 *Existem ao menos três pontos não colineares.*

Axioma .4 *Existe uma função $|\cdot| : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|AB| := |(A, B)| \geq 0$ e $|AB| = 0$ se e somente se $A = B$.*

Chamamos $|AB|$ de distância entre A e B , apesar de não termos ainda demonstrado que esta de fato é uma distância.

Axioma .5 Dada uma reta l , existe uma bijeção $x : l \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|AB| = |x(A) - x(B)|, \forall A, B \in l.$$

Mais ainda, dados pontos distintos $A, B \in l$, podemos tomar x tal que $x(A) = 0$ e $x(B) > 0$.

Este axioma está nos dizendo que podemos identificar cada reta com os reais de modo que a distância de \mathbb{P} restrita a reta seja compatível com a estrutura da reta real. Chamamos a bijeção $A \mapsto x(A)$ de um sistema de coordenadas em l .

Exercício .6 Mostre que se $x : l \rightarrow \mathbb{R}$ for um sistema de coordenadas, então $y(A) := x(A) + x_0$ também será sistema de coordenadas.

Com o auxílio de um sistema de coordenadas podemos definir segmentos de reta e semi-retas. Dados dois pontos $A, B \in \mathbb{P}$, consideramos a reta $l = \overleftrightarrow{AB}$ (Axioma 1) e um sistema de coordenadas $x : l \rightarrow \mathbb{R}$ (Axioma 3). Supomos $x(A) \leq x(B)$ e definimos:

$$\begin{aligned} \text{segmento } \overline{AB} &= \{C \in l \mid x(A) \leq x(C) \leq x(B)\}; \\ \text{semi-reta } \overrightarrow{AB} &= \{C \in l \mid x(A) \leq x(C)\}, (A \neq B); \\ \text{semi-reta } \overleftarrow{AB} &= \{C \in l \mid x(C) \leq x(B)\}, (A \neq B). \end{aligned}$$

Observe que $|AB| = |x(A) - x(B)|$ de modo podemos dizer que $|AB|$ é o comprimento do segmento AB . Dizemos ainda que A é o ponto inicial da semi-reta \overrightarrow{AB} . Dizemos ainda que C está entre A e B se $C \in \overline{AB}$, o que denotamos por $A - C - B$.

Exercício .7 Se C está entre A e B então $|AC| + |CB| = |AB|$.

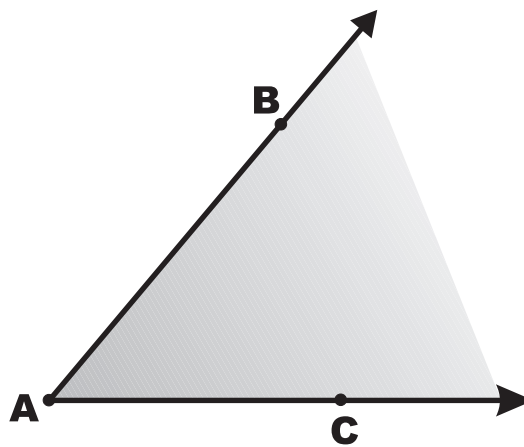
Duas semi-retas com mesmo ponto inicial \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} contidas em uma mesma reta l ou coincidem (se $C \in \overline{AB}$ ou $B \in \overline{AC}$) ou se interceptam apenas no ponto A , caso em que dizemos serem semi-retas opostas.

Axioma .8 Dada uma reta l , existem dois subconjuntos disjuntos $H_{l,1}, H_{l,2} \subset \mathbb{P}$ (chamados de semiplanos determinados por l) tais que $H_{l,1} \cap l = H_{l,2} \cap l = \emptyset$ e $H_{l,1} \cup l \cup H_{l,2} = \mathbb{P}$ satisfazendo a seguinte condição:

- Dois pontos $A, B \in \mathbb{P}$ pertencem ao mesmo semiplano se e somente se $\overline{AB} \cap l = \emptyset$.

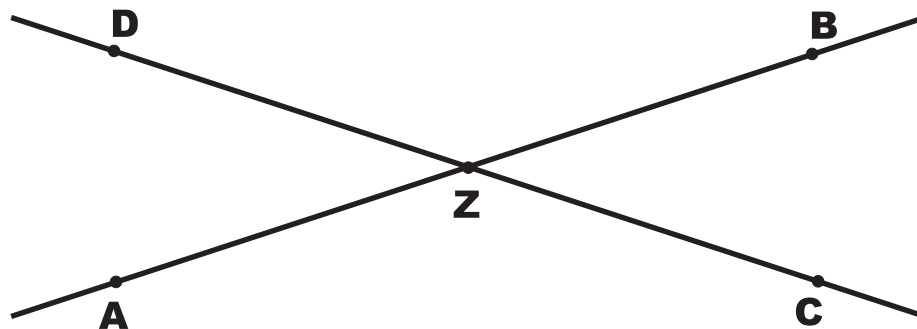
Duas semi-retas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} com mesmo ponto inicial formam um *ângulo* que denotamos por $\angle BAC$ e chamamos A de *vértice do ângulo* (usaremos a notação \widehat{A} para um ângulo com vértice A). Se as semi-retas não coincidem nem são opostas, definimos o *interior* $\text{int}(\angle BAC)$ do ângulo $\angle BAC$ como sendo o conjunto dos pontos que estão do mesmo lado que B da reta \overleftrightarrow{AC} e do mesmo lado que C da reta \overleftrightarrow{AB} . O *interior de um triângulo* $\triangle ABC$ é a intersecção dos interiores de seus ângulos:

$$\text{int}(\triangle ABC) = \text{int}(\angle ABC) \cap \text{int}(\angle CAB) \cap \text{int}(\angle BCA).$$



Exercício .9 Dados ângulo $\angle BAC$ e um ponto $P \in \text{int}(\angle BAC)$, mostre que o segmento de reta \overline{AP} está contido em $\text{int}(\angle BAC)$ (com exceção do ponto A).

Duas retas distintas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} se interceptando em um ponto $Z = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ determinam os ângulos $\angle AZC, \angle CZB, \angle BZD$ e $\angle DZA$. Dizemos que $\angle AZC$ e $\angle CZB$ são ângulos *suplementares* (assim como os pares $(\angle CZB, \angle BZD)$, $(\angle BZD, \angle DZA)$ e $(\angle DZA, \angle AZC)$) e os pares $(\angle AZC, \angle BZD)$ e $(\angle CZB, \angle DZA)$ são *opostos pelo vértice* Z .



De modo análogo ao feito no Axioma .5, que identifica os pontos de uma reta com um contínuo de pontos, podemos identificar famílias de ângulos com um contínuo de pontos da reta.

Axioma .10 A cada ângulo \widehat{A} associamos uma medida $m(\widehat{A})$, com

$$0 \leq m(\widehat{A}) \leq \pi,$$

satisfazendo as seguintes condições:

1. Se $A, B \in l$ e H é um dos semi-planos definidos por l , então, para todo $0 \leq x \leq \pi$ existe uma única semi-reta \overrightarrow{AP} contida em $H \cup l$ tal que $m(\angle PAB) = x$.
2. Se as semi-retas \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{AB} coincidem então $m(\angle PAB) = 0$; se as semi-retas \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{AB} são opostas então $m(\angle PAB) = \pi$;
3. Se $D \in \text{int}\angle BAC$ então $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$.

Segue desta definição que a soma das medidas de dois ângulos suplementares é π . Além disto, dizemos que um ângulo é *reto* se tiver mesma medida que seu suplementar, ou seja, se medir $\pi/2$. Dois ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ são ditos *complementares* se $m(\angle BAD) + m(\angle DAC) = \pi/2$.

Congruência de triângulos é uma das questões centrais da geometria euclidiana clássica. Adotamos a seguinte definição:

Definição .11 Dois triângulos $\triangle A_1A_2A_3$ e $\triangle B_1B_2B_3$ são ditos congruentes se existir uma bijeção $f : \{A_1, A_2, A_3\} \rightarrow \{B_1, B_2, B_3\}$ tal que:

1. $\widehat{A}_i = f(\widehat{A}_i)$, $i = 1, 2, 3$;
2. $|A_iA_j| = |f(A_i)f(A_j)|$, $i, j = 1, 2, 3$.

Adotamos a seguinte notação: $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$ implica não apenas que existe $f : \{A, B, C\} \rightarrow \{D, E, F\}$ que identifica os triângulos, mas que $f(A) = D$, $f(B) = E$ e $f(C) = F$.

Postulamos ainda, em forma de axioma, o primeiro caso de congruência de triângulos.

Axioma .12 (1o caso de congruência) Dados triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$, então $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$.

Apenas a partir destes axiomas podemos demonstrar uma série de resultados, velhos conhecidos desde os cursos de geometria do 2o grau. Definições que são de domínio público, tais como triângulos isóceles, equiláteros e outras mais serão simplesmente assumidas no decorrer do teto. Também os resultados que apresentamos nesta seção, muitas vezes serão apenas enunciados e não demonstrados. O principal critério de escolha é a simplicidade da demonstração: não demonstraremos qualquer resultado cuja demonstração seja longa. As demonstrações podem ser encontradas em diversos textos sobre geometria euclidiana, apesar de o número de axiomáticas distintas ser quase tão grande como o de textos existentes sobre o assunto. Uma axiomática muito próxima desta que adotamos pode ser encontrada em [RaRi].

Começamos introduzindo os dois outros casos de congruência:

Teorema .13 (2o caso de congruência) *Dados triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $|AB| = |DE|$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$.*

Teorema .14 (3o caso de congruência) *Dados triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$ e $|CA| = |FD|$ então $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$.*

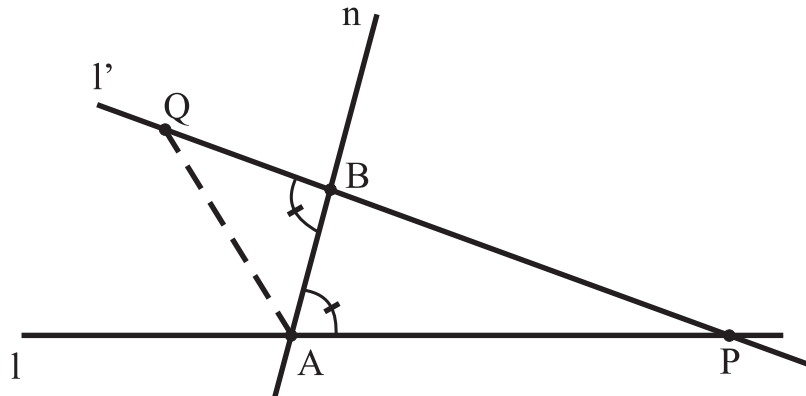
Teorema .15 (barras cruzadas) *Dado triângulo $\triangle ABC$ e semi-reta \overrightarrow{AD} contida no interior do ângulo $\angle BAC$, então a semi-reta intercepta o lado \overline{BC} .*

Teorema .16 (ângulos alternados) *Se uma reta m intercepta duas retas $l \neq l'$ de modo que os ângulos alternados internos sejam congruentes, então l e l' são paralelas, ou seja, não se interceptam.*

Demonstração: Seja $A = m \cap l$ e $B = m \cap l'$ e suponha que l e l' se interceptem em um ponto $P \in H_{m,1}$. Seja então Q outro ponto de l' , $Q \in H_{m,2}$, tal que $|BP| = |BQ|$. Então os triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle ABQ$ são congruentes, donde segue que

$$\angle PAB + \angle BAQ = \angle QBA + \angle ABP = \pi,$$

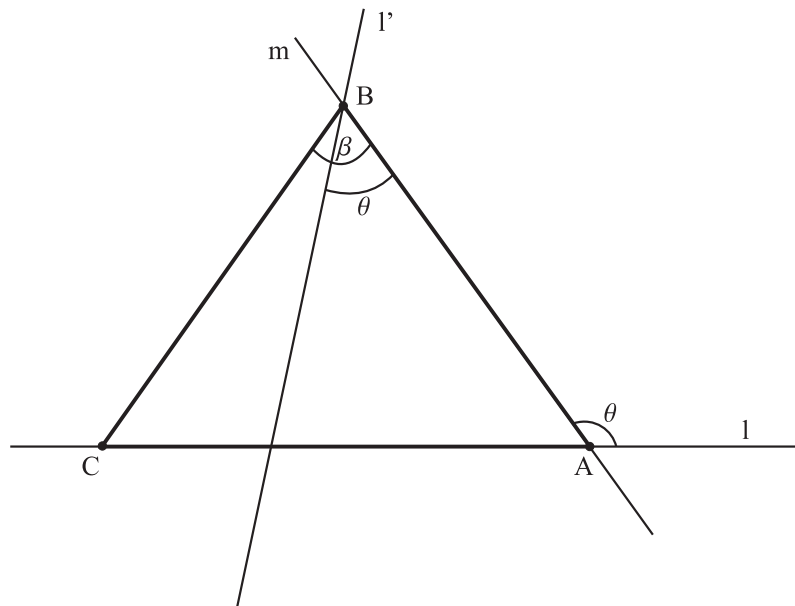
pois $\angle QBA$ e $\angle ABP$ são suplementares. Temos então que $\angle PAB$ e $\angle BAQ$ também são suplementares, donde segue que $Q \in l$, contradizendo a hipótese de termos l e l' distintas.



□

Teorema .17 (ângulos externos) Um ângulo externo de um triângulo é sempre maior do que qualquer um dos ângulos internos opostos.

Demonstração: Considere triângulo $\triangle ABC$ com vértices α, β e γ . Seja θ ângulo externo no vértice A , ou seja, suplementar a α . Se tivéssemos $\beta = \theta$, então, pelo Teorema dos Ângulos Alternados, as retas $l = \overleftrightarrow{AC}$ e $l' = \overleftrightarrow{BC}$ seriam paralelas, um absurdo. Suponha então que $\beta > \theta$. Sejam $l = \overleftrightarrow{AC}$ e $m = \overleftrightarrow{AB}$. Traçamos por B uma reta l' de modo que o ângulo alternado interno (relativo a l) formado por m e l' seja igual a θ . Uma das semi-retas definidas por l' com ponto inicial B está contida no interior do ângulo β . Pelo Teorema das Barras Cruzadas, esta semi-reta deve interceptar o segmento \overline{AC} , contradizendo o Teorema dos Ângulos Alternados.



□

Corolário .18 *A soma de dois ângulos internos de um triângulo é estritamente menor do que π .*

Demonstração: Seja $\theta = \pi - \alpha$ o ângulo externo no vértice A . Pelo Teorema dos Ângulos Externos, temos que $\beta < \theta$. Segue que $\alpha + \beta < \alpha + \theta = \alpha + (\pi - \alpha) = \pi$.
□

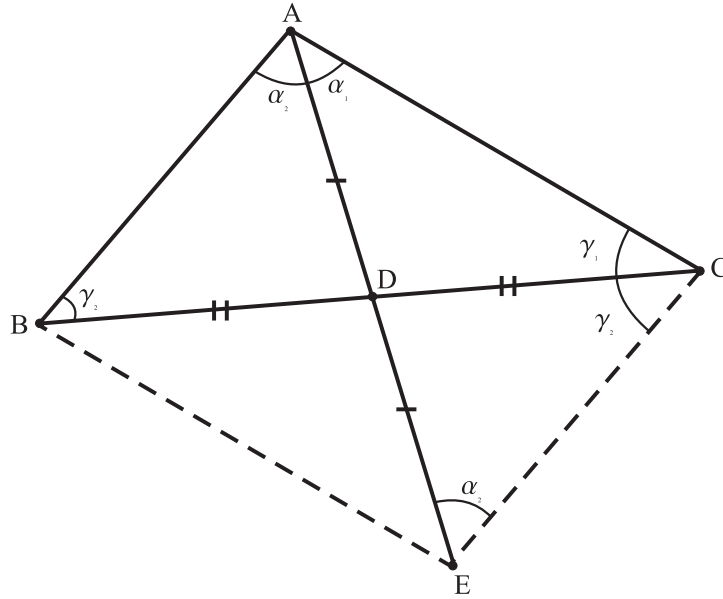
Com um pouco mais de esforço podemos demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo não excede π .

Teorema .19 *A soma dos ângulos internos de um triângulo não excede π .*

Demonstração: Suponha que a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ seja $\pi + \delta$, com $\delta > 0$. Seja D o ponto médio do segmento \overline{BC} e E o ponto da reta \overleftrightarrow{AD} tal que $|AD| + |DE| = |AE|$. Por congruência de triângulos, temos que $m(\angle DCE) = m(\angle DBA)$ e $m(\angle DEC) = m(\angle DAB)$. Adotemos a seguinte notação:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= m(\angle BCA) \\ \alpha_1 &= m(\angle EAC) \\ \gamma_2 &= m(\angle DCE) = m(\angle DBA) \\ \alpha_2 &= m(\angle DEC) = m(\angle DAB).\end{aligned}$$

Por construção, ambos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AEC$ tem soma dos ângulos internos igual a $\alpha_1 + \gamma_1 + \alpha_2 + \gamma_2 = \pi + \delta$. Como $m(\angle BAC) = \alpha_1 + \alpha_2$, um dos ângulos do triângulo $\triangle AEC$ (no vértice A ou no vértice E) tem ângulo menor do que $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$. Repetindo este raciocínio, agora para o triângulo $\triangle AEC$, obtemos um triângulo $\triangle AEF$ com soma dos ângulos internos igual a $\pi + \delta$, mas com um dos ângulos menor que $\frac{1}{2^2}(\alpha_1 + \alpha_2)$. Prosseguindo deste modo, obtemos em algum momento triângulo com soma dos ângulos internos igual a $\pi + \delta$, mas com um dos ângulos menor δ , o que implicaria na soma dos ângulos restantes ser maior do que π , contradizendo o corolário .18.



□

Observe que este teorema não contradiz o conhecido resultado euclidiano de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é π . No entanto, para se demonstrar este fato é necessário o Axioma das Paralelas Euclidiano. Na realidade, este fato é equivalente a termos uma geometria euclidiana.

Apenas para futura referência, definimos o *defeito* $\mathcal{D}(\Delta)$ de um triângulo Δ como $\mathcal{D}(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ onde α, β e γ são os ângulos internos do triângulo.

Outra consequência direta do Teorema dos Ângulos Externos é que a função $|\cdot|$ definida no Axioma .4 é de fato uma função distância, ou seja, satisfaz a desigualdade triangular:

$$|AC| \leq |AB| + |BC|, \forall A, B, C \in \mathbb{P}.$$

Para demonstrar esta proposição necessitamos do seguinte lema:

Lema .20 *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, os ângulos opostos a estes lados também não são congruentes. Neste caso, o maior ângulo é oposto ao maior lado do triângulo.*

Demonstração: Suponha que $|BC| < |AC|$. Tomamos então D entre A e C tal que $|BC| = |CD|$. Pelo Teorema do Ângulo Externo temos que $m(\angle CDB) > m(\angle CAB)$. Mas $\triangle BCD$ é isósceles, donde segue que (é necessário demonstrar) que $m(\angle CDB) = m(\angle CBD)$, que por sua vez é estritamente menor que

$$m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC).$$

□

Exercícios .21 1. *Demonstre que se dois lados de um triângulo são congruentes, então os ângulos opostos também o são.*

2. *Demonstre se os três lados de um triângulo são congruentes então os três ângulos também o são.*

3. *Demonstre a segunda parte do lema .20.*

4. *Demonstre que se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, os lados opostos a estes lados também não são congruentes. Neste caso, o maior lado é oposto ao maior ângulo do triângulo.*

Teorema .22 (Desigualdade Triangular) *A função $|\cdot|$ é de fato uma métrica, ou seja, satisfaz a desigualdade triangular:*

$$|AC| \leq |AB| + |BC|, \forall A, B, C \in \mathbb{P}.$$

Demonstração: Se os pontos forem colineares, pertencentes a uma reta l , tomamos coordenada $x : l \rightarrow \mathbb{R}$ e o resultado segue das propriedades de x e da desigualdade triangular na reta real.

Suponha então que os pontos determinam um triângulo não degenerado $\triangle ABC$. Seja D o ponto da semi-reta \overrightarrow{AB} tal que $|BC| = |BD|$ com B entre A e D . Como B encontra-se entre A e D temos que $m(\angle ACD) = m(\angle ACB) + m(\angle BCD)$ e em particular, $m(\angle ACD) > m(\angle BCD)$. Como por construção $\triangle CBD$ é isósceles, temos que (exercício 1) $m(\angle BCD) = m(\angle BDC) = m(\angle ADC)$. Segue (exercício 4) que $|AC| < |AD|$. Mas por construção $|AD| = |AB| + |BD|$ e $|BD| = |BC|$. \square

3 Geometria Hiperbólica

O enunciado original do 5o Postulado de Euclides é o seguinte:

Postulado .23 (5o Postulado de Euclides) *Dadas duas retas, interceptadas por uma terceira, de modo que a soma de dois ângulos internos do mesmo lado da terceira é menor que dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se interceptam deste lado da terceira reta.*

Um enunciado equivalente, mas consideravelmente mais transparente, foi feito por John Fairplay:

Postulado .24 (Postulado Euclidiano das Paralelas) *Dada uma reta l e um ponto p não pertencente a l , existe uma e apenas uma reta passando por p e paralela a reta l .*

- Exercício .25** 1. (a) *Mostre que se duas retas são interceptadas por uma terceira, de modo que os ângulos alternados interiores são congruentes, então estas retas são paralelas.*
- (b) *Conclua, usando o ítem anterior, que o 5o Postulado de Euclides e o Postulado Euclidiano das Paralelas são equivalentes.*
- (c) *Assumindo o Postulado das Paralelas, mostre que se a reta m intercepta duas retas paralelas l e l' , então os ângulos alternados interiores são congruentes.*
- (d) *Utilize o resultado acima para mostrar que, em geometria euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é π .*

Vamos a partir deste momento assumir o Postulado Hiperbólico das Paralelas, que nada mais é que uma das duas possíveis negações formais do postulado euclidiano.

Axioma .26 (Postulado Hiperbólico das Paralelas) *Existe uma reta l e um ponto P não pertencente a l tais que existem duas retas distintas, m e m' , ambas paralelas a l e ambas contendo o ponto P .*

Exercício .27 *Considere a seguinte negação do Postulado Euclidiano das Paralelas: "Existe uma reta l e um ponto p não pertencente a l tais que não existe reta por p paralela a l ". Conclua que existe um triângulo com defeito negativo, ou seja, esta negação é incompatível com os axiomas da geometria neutra.*

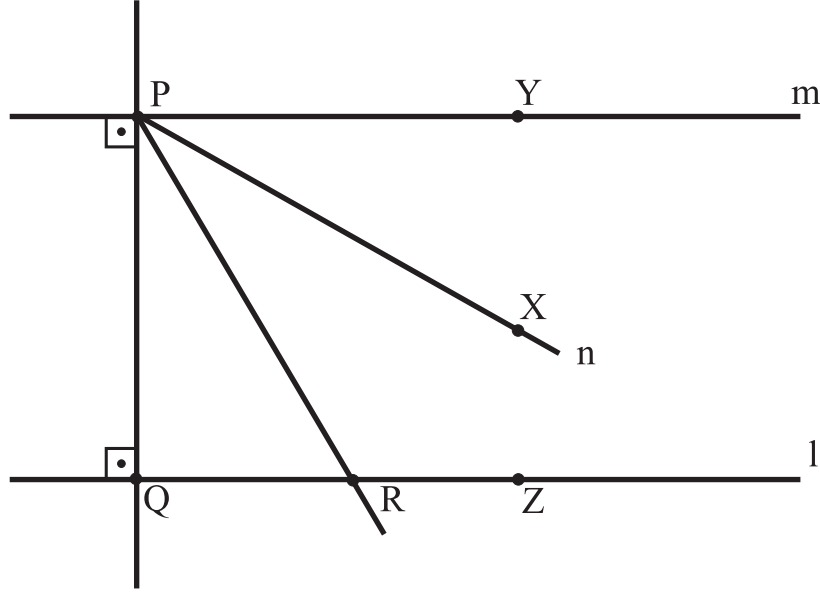
Observe que o Postulado Hiperbólico das Paralelas fala sobre a existência de uma reta e um ponto pelo qual passam duas paralelas distintas. Na realidade, isto é válido para toda reta e todo ponto não pertencente a esta. Para demonstrar este fato precisamos dos seguintes resultados:

Lema .28 *Em geometria hiperbólica, existe triângulo com defeito positivo.*

Demonstração: Seja l reta e $P \notin l$ tal que por p existam ao menos duas paralelas a l . Seja \overline{PQ} a altura da reta l com $Q \in l$ e m a reta passando por P e perpendicular a \overline{PQ} . É fácil demonstrar que m é paralela a l (segue imediatamente do Teorema .19). Seja n outra paralela a l passando por P . Escolhemos pontos $Y \in m$ e $X \in n$ tais que $X \in \text{int}(\angle YPQ)$. Seja $Z \in l$ no mesmo lado de \overleftrightarrow{PQ} que os pontos X e Y . Escolhemos ponto R pertencente a reta \overleftrightarrow{QZ} tal que $m(\angle QRP) < m(\angle XPY)$ (uma demonstração da existência deste ponto pode ser encontrada em [RaRi, capítulo 3.1]). Se mostrarmos que $m(\angle RPQ) < m(\angle QPX)$ concluiremos que

$$\begin{aligned} D(\triangle RPQ) &= \pi - m(\angle RPQ) - m(\angle PQR) - m(\angle QRP) \\ &> \pi - m(\angle QPX) - \pi/2 - m(\angle XPY) \\ &= \pi/2 - m(\angle QPY) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mas dizer que $m(\angle RPQ) < m(\angle QPX)$ é equivalente a termos $R \in \text{int}(\angle QPX)$ e se isto não ocorresse teríamos \overrightarrow{PR} e l de lados opostos da reta n , implicando em termos as retas \overrightarrow{PR} e n se interceptando em um segundo ponto distinto de P , um absurdo (axioma .1). Segue então que $R \in \text{int}(\angle QPX)$ e conseqüentemente $m(\angle RPQ) < m(\angle QPX)$. \square



Para demonstrarmos que todo triângulo tem defeito positivo, precisamos definir polígonos convexos e os respectivos defeitos.

Definição .29 *Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n, n \geq 3$ uma seqüência de pontos distintos em \mathbb{P} tais que*

$$\overline{A_i A_{i+1}} \cap \overline{A_j A_{j+1}} = \begin{cases} A_{i+1} & \text{se } i + 1 = j \\ A_{j+1} & \text{se } j + 1 = i \\ \emptyset & \text{se } |i - j| \neq 1 \end{cases}$$

onde entendemos que se $i = n$ então $i + 1 = 0$. Então, a união dos segmentos

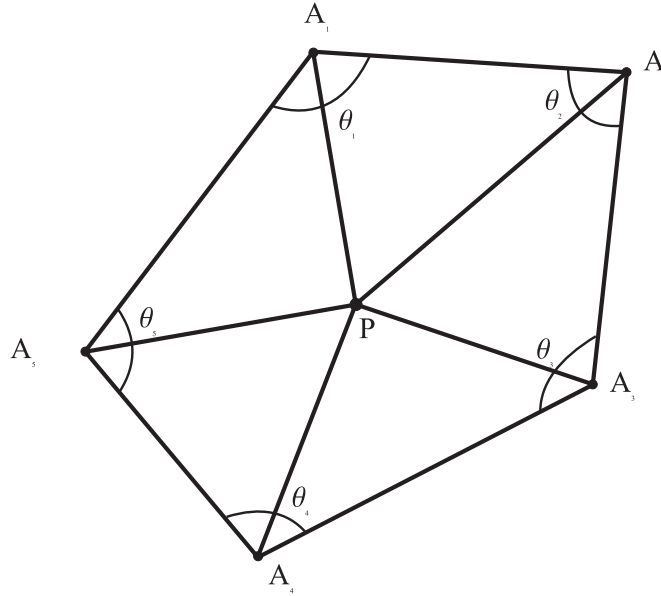
$$\mathcal{P}_n = \cup_{i=1}^n \overline{A_i A_{i+1}}$$

é dito um polígono de n lados, com vértices A_1, A_2, \dots, A_n . O polígono é dito estritamente convexo se para todo $i = 1, 2, \dots, n$ todos os vértices A_j , com $j = i, i + 1$ estiverem contidos em um único semi-plano $H_{\overrightarrow{A_i A_{i+1}}, \sigma_i}$ definido pela reta $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$. Diremos que o polígono é convexo se admitirmos o caso limite em que A_{i+2} ou A_{i-1} não estejam contidos no semiplano $H_{\overrightarrow{A_i A_{i+1}}, \sigma_i}$ que contém os outros vértices mas na reta $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$. Em qualquer um destes casos, chamamos $\cap_{i=1}^n H_{\overrightarrow{A_i A_{i+1}}, \sigma_i}$ de interior de \mathcal{P}_n .

Definição .30 O defeito $\mathcal{D}(\mathcal{P}_n)$ de um polígono convexo \mathcal{P}_n é o número

$$(n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n m(\theta_i),$$

onde θ_i é o ângulo formado pelas semi-retas $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ e $\overrightarrow{A_i A_{i-1}}$.



Se considerarmos um ponto P pertencente ao interior do polígono \mathcal{P}_n , podemos decompor \mathcal{P}_n como união dos triângulos $\triangle A_i P A_{i+1}$. É imediato constatar-mos o seguinte:

Teorema .31 O defeito de \mathcal{P}_n é igual a soma dos defeitos dos triângulos que o decompõem, ou seja,

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}(\triangle A_i P A_{i+1}).$$

Teorema .32 Sejam \mathcal{P} e \mathcal{P}' dois polígonos convexos tais que $\mathcal{P} \subset \text{int}(\mathcal{P}')$. Então, $\mathcal{D}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{D}(\mathcal{P}')$.

Demonstração: Seja $P \in \text{int}(\mathcal{P}) \subset \text{int}(\mathcal{P}')$. Sejam n e m o número de lados de \mathcal{P} e \mathcal{P}' respectivamente. Unimos P com cada um dos vértices de \mathcal{P}' , de modo a decompor \mathcal{P}' em triângulos. Considere dois vértices consecutivos A'_i, A'_{i+1} de \mathcal{P}' e o triângulo correspondente $\triangle P A'_i A'_{i+1}$. O lado $\overline{P A'_i}$ deste triângulo intercepta o lado $\overline{A_{j,i} A_{j+1,i}}$ de \mathcal{P} em um ponto E_i , para algum j, i , e o lado $\overline{P A'_{i+1}}$ algum outro

lado $\overline{A_{j_i+k_i}A_{j_i+k_i+1}}$ em um ponto D_{i+1} . Para cada $A_{l,i}$, com $j_i < l < j_i + k_i + 1$, consideramos a semi reta $\overrightarrow{PA_{l,i}}$ e sua intersecção $B_{l,i} = \overrightarrow{PA_{l,i}} \cap \mathcal{P}'$. Temos então que o triângulo $\triangle PB_{l,i}B_{l,i+1}$ pode ser decomposto como a união $\triangle PA_{l,i}A_{l+1,i} \cup \triangle A_{l,i}A_{l+1,i}B_{l,i} \cup \triangle A_{l+1,i}B_{l,i}B_{l+1,i}$. Similarmente, o triângulo $\triangle PB_{j_i+1,i}A'_i$ pode ser decomposto nos triângulos $\triangle PA_{j_i+1,i}E_i \cup \triangle A_{j_i+1,i}E_iA'_i \cup \triangle A_{j_i+1,i}A'_iB_{j_i+1,i}$ e o triângulo $\triangle PB_{j_i+k_i,i}A'_{i+1}$ pode ser decomposto nos triângulos $\triangle PA_{j_i+k_i,i}D_{i+1} \cup \triangle A_{j_i+k_i,i}D_{i+1}A'_{i+1} \cup \triangle A_{j_i+k_i,i}A'_{i+1}B_{j_i+k_i,i}$. Mas os triângulos

$$\triangle PA_{l,i}A_{l+1,i}, \triangle A_{l,i}A_{l+1,i}B_{l,i}, \triangle PB_{l,i}B_{l+1,i}; \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$j_i < l < j_i + k_i + 1;$$

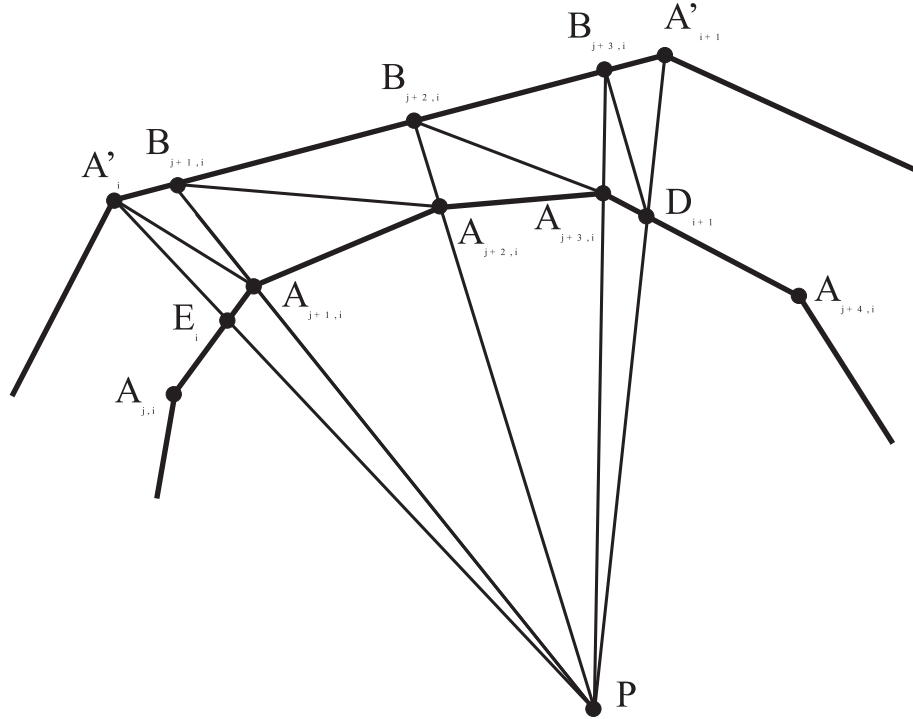
$$\triangle PA_{j_i+1,i}E_i, \triangle A_{j_i+1,i}E_iA'_i, \triangle A_{j_i+1,i}A'_iB_{j_i+1,i}; \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\triangle PA_{j_i+k_i,i}D_{i+1}, \triangle A_{j_i+k_i,i}D_{i+1}A'_{i+1}, \triangle A_{j_i+k_i,i}A'_{i+1}B_{j_i+k_i,i}, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

decompõem \mathcal{P}' enquanto os triângulos

$$\triangle PA_{l,i}A_{l+1,i}, \triangle PA_{j_i+1,i}E_i, \triangle PA_{j_i+k_i,i}D_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

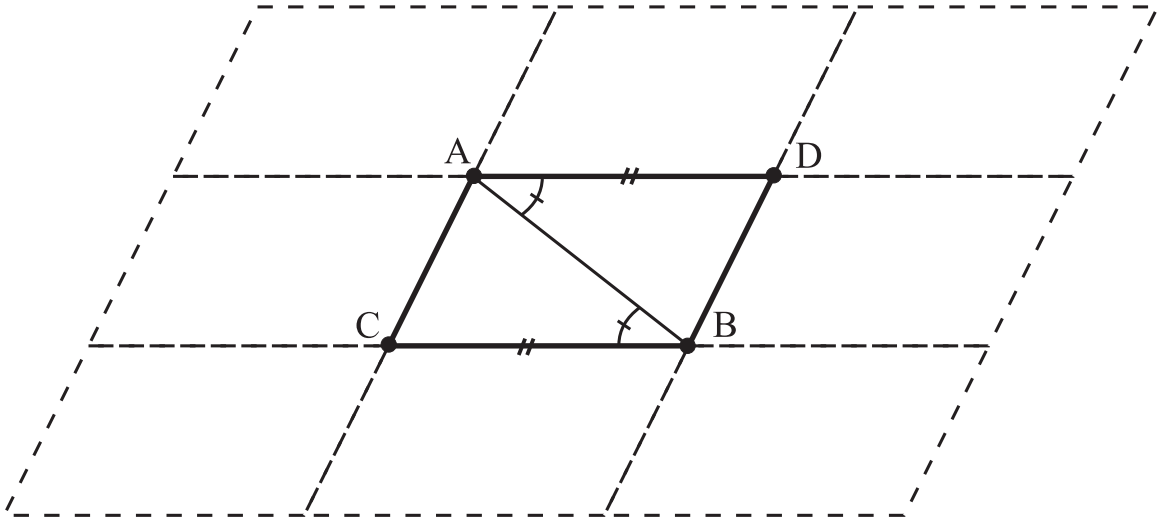
decompõem o polígono \mathcal{P} . Enfim, encontramos uma decomposição em triângulos de \mathcal{P}' que contém uma decomposição de \mathcal{P} . Como o defeito de um polígono é a soma dos defeitos dos triângulos que o decompõem, segue que $\mathcal{D}(\mathcal{P}') \geq \mathcal{D}(\mathcal{P})$. \square



Usando este resultado, podemos constatar que em geometria hiperbólica, a existência de triângulo com defeito é uma propriedade universal.

Teorema .33 *Em geometria hiperbólica, todo triângulo tem defeito positivo, ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que π .*

Demonstração: Suponha que $\triangle ABC$ seja um triângulo com defeito nulo. A partir de A traçamos semi-reta \overrightarrow{AD} com $m(\angle DAB) = m(\angle CBA)$, D e C de lados opostos da reta \overleftrightarrow{AB} e $|AD| = |BC|$. Segue que o triângulo $\triangle ABD$ é congruente ao triângulo original $\triangle ABC$, portanto este também tem defeito nulo. Colocando lado a lado cópias do polígono $\square(ADBC)$, obtemos polígonos tão grandes como queiramos, sempre com defeito nulo. Podemos neste processo aumentar o polígono até que este contenha em seu interior um triângulo \triangle dado qualquer. Mas pelo teorema anterior, o defeito de \triangle deve ser menor que o do polígono que o contém, ou seja, defeito nulo, um absurdo, pois abemos que existe ao menos um triângulo com defeito positivo. \square



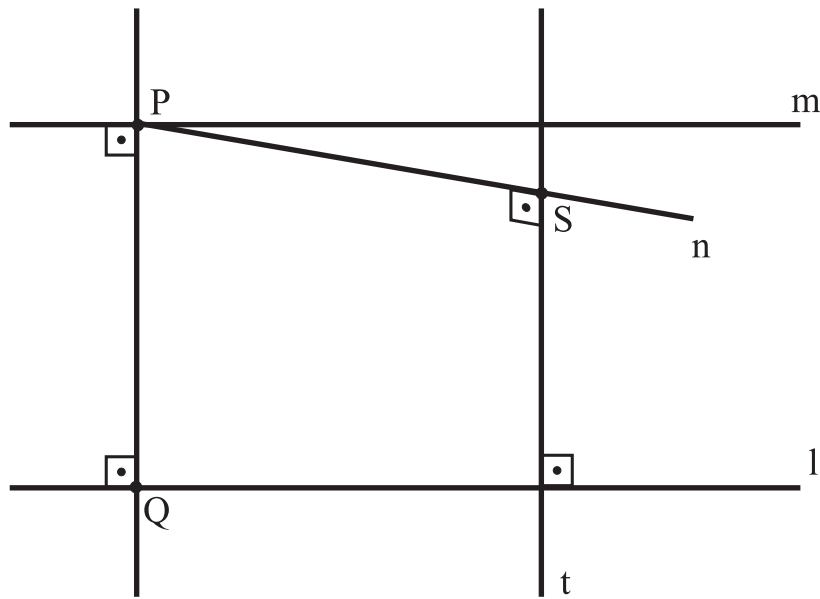
A partir deste resultado, podemos mostrar a universalidade do Axioma Hiperbólico das Paralelas.

Teorema .34 (Axioma Hiperbólico Universal das Paralelas) *Em geometria hiperbólica, dada uma reta l e um ponto $P \notin l$, existem duas retas distintas m e m' passando por P e paralelas a l .*

Demonstração: Seja \overline{PQ} a altura da reta l com $Q \in l$ e m a reta passando por P e perpendicular a \overline{PQ} . Conforme vimos anteriormente, m é paralela a l .

Seja R um ponto de l distinto de Q e t a reta por R perpendicular a l . Seja n a altura relativa a t passando por P e $S = n \cap t$. Como t é perpendicular a l e n é perpendicular a t , temos que n é paralela a l , também passando por P . Precisamos apenas mostrar que $n \neq m$.

De fato, se tivéssemos $m = n$, teríamos que o quadrilátero $\mathcal{P}(PQRS)$ teria todos os ângulos retos e portanto defeito nulo, o que implicaria que cada um dos triângulos $\triangle PQS$ e $\triangle RQS$ seria um triângulo com defeito nulo, contradizendo o teorema .33. \square



Mimetizando o que ocorre em geometria euclediana dizemos que dois triângulos são *semelhantes* se possuem ângulos correspondentes congruentes. Em geometria hiperbólica, esta definição nada acrescenta:

Teorema .35 *Em geometria hiperbólica, dois triângulos semelhantes são congruentes.*

Demonstração: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos semelhantes. Suponhamos por absurdo que estes não sejam congruentes. Então, nenhum lado é congruente ao seu correspondente, pois do contrário o segundo critério de congruência nos garantiria a congruência dos triângulos. Segue então que um deles tem dois lados maiores que os seus correspondentes no outro triângulo. Sem perda de generalidade vamos supor que $|AB| > |A'B'|$ e $|AC| > |A'C'|$.

Tomamos então pontos $B'' \in \overline{AB}$ e $C'' \in \overline{AC}$ tais que $|A'B'| = |A'B''|$ e $|A'C'| = |A'C''|$. Pelo primeiro critério de congruência, os triângulos $\triangle A'B'C'$ e

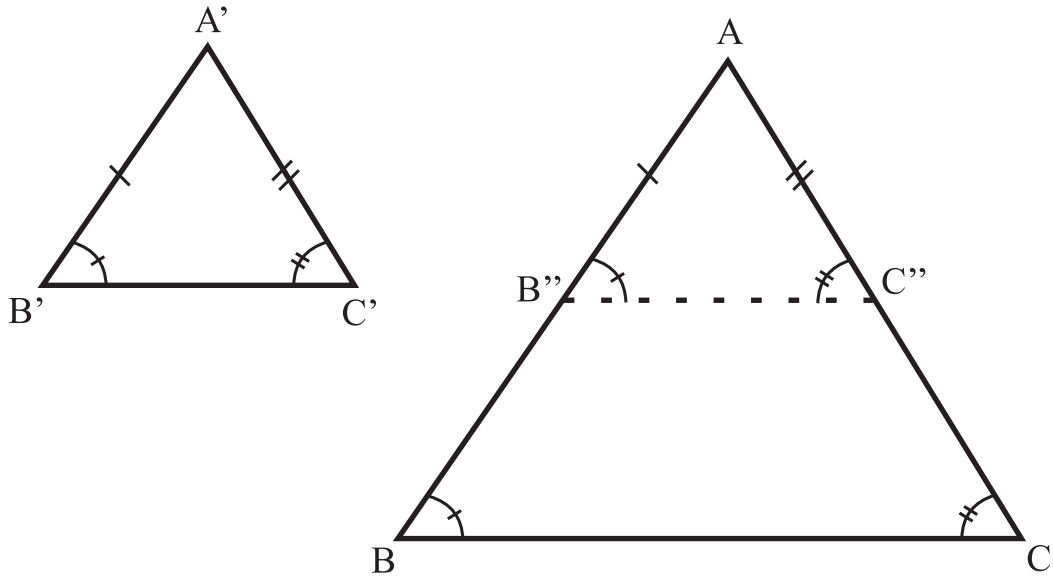
$\triangle AB''C''$ são congruentes, donde segue que

$$\begin{aligned} m(\angle AB''C'') &= m(\angle A'B'C') = m(\angle ABC), \\ m(\angle AC''B'') &= m(\angle A'C'B') = m(\angle ACB). \end{aligned}$$

Se considerarmos o quadrilátero $\square = \square(BB''C''C)$, temos que seu defeito é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\square) &= 2\pi - m(\angle BB''C'') - m(\angle B''C''C) - m(\angle C''CB) - m(\angle CBB'') \\ &= 2\pi - m(\angle CBA) - (\pi - m(\angle AB''C'')) - (\pi - m(\angle AC''B'')) - m(\angle ACB) \\ &= 0, \end{aligned}$$

um absurdo, pois todo polígono hiperbólico tem defeito positivo. \square



Definição .36 Dizemos que dois pontos A e B são equidistantes de uma reta l se tivermos $|AA'| = |BB'|$, onde $A', B' \in l$ e ambos os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são perpendiculares a l .

Teorema .37 Em geometria hiperbólica, dadas retas paralelas l e l' , todo subconjunto de pontos de l , equidistante de l' , possui no máximo dois elementos.

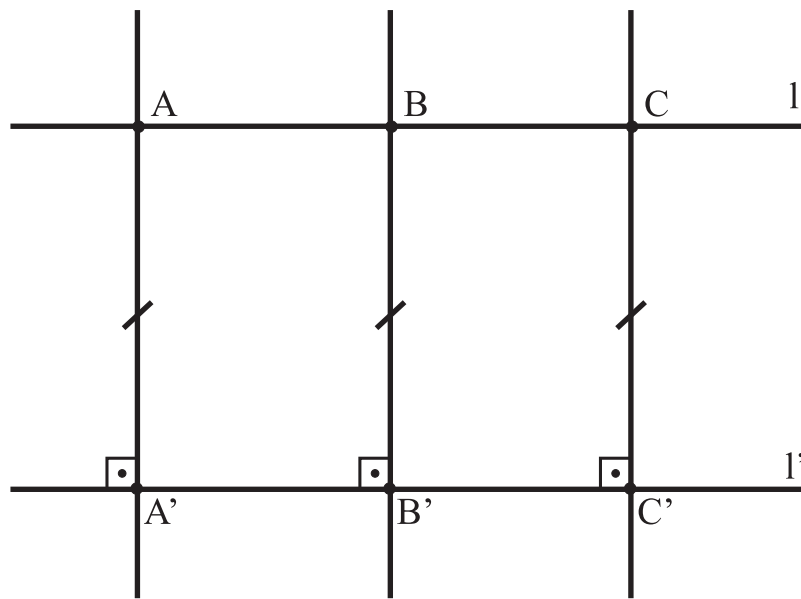
Demonstração: Suponha $A, B, C \in l$ pontos distintos e equidistantes de l' . Sejam $A', B', C' \in l'$ as bases das alturas. Vamos supor que B está entre A e C e B' entre A' e C' . Considere o quadrilátero $\square = \square(AA'B'B)$. Como estamos

assumindo que $|AA'| = |BB'|$, os triângulos $\triangle AA'B'$ e $\triangle BB'A'$ são congruentes, de modo que $m(\angle AB'A') = m(\angle BA'B')$ e $|AB'| = |BA'|$. Consequentemente,

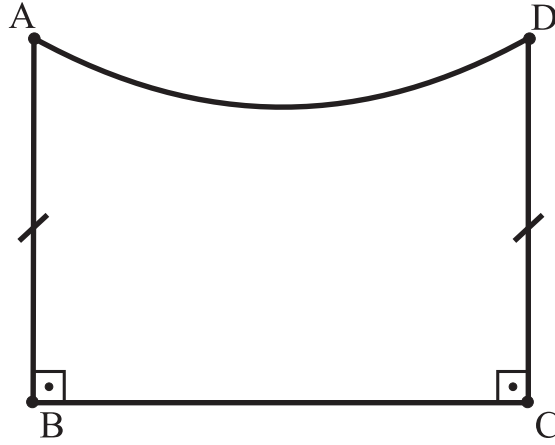
$$\begin{aligned} m(\angle AA'B) &= \pi - m(\angle BA'B') \\ &= \pi - m(\angle AB'A') \\ &= m(\angle BB'A). \end{aligned}$$

Segue então, pelo primeiro critério de congruência, que $\triangle A'AB \simeq \triangle B'BA$ e consequentemente $m(\angle A'AB) = m(\angle B'BA)$.

Aplicando raciocínio análogo aos quadriláteros $\square(ACC'A')$ e $\square(BCC'B')$, concluímos que $m(\angle A'AB) = m(\angle C'CB)$ e $m(\angle C'CB) = m(\angle B'BC)$. Mas $\angle B'BA$ e $\angle B'BC$ são suplementares e congruentes, logo são ângulos retos. Temos então que os quadriláteros em questão possuem todos os ângulos retos, um absurdo, pois neste caso teriam defeito nulo. \square



Definição .38 Um quadrilátero de Sacheri é um quadrilátero $\square(ABCD)$ onde $|AB| = |CD|$ e $m(\angle ABC) = m(\angle BCD) = \pi/2$.



Na demonstração do teorema anterior, os quadriláteros $\mathcal{P}(AA'B'B)$, $\square(ACC'A')$ e $\square(BCC'B')$ eram todos quadriláteros de Sacheri. Conforme vimos na demonstração do teorema anterior, em um quadrilátero de Sacheri $\square(ABCD)$, os ângulos $\angle BAD$ e $\angle CBA$ são congruentes e medem menos que $\pi/2$.

Sabemos, pelo postulado universal das paralelas, que por um ponto qualquer podemos sempre encontrar duas retas paralelas a uma reta dada. Na realidade, existe todo um contínuo de retas paralelas, com duas retas extremas (em um sentido que explicaremos em breve).

Para entender a posição relativa entre retas paralelas, começamos com o seguinte teorema:

Teorema .39 *Sejam l e l' duas retas paralelas com um par de pontos distintos $A, B \in l$ equidistantes de l' . Então existe segmento $\overline{MM'}$ perpendicular a l e a l' simultaneamente, com $M \in l$ e $M' \in l'$. Mais ainda, $|MM'| < |CC'|$ para quaisquer $C \in l, C' \in l'$ com $(M, M') \neq (C, C')$.*

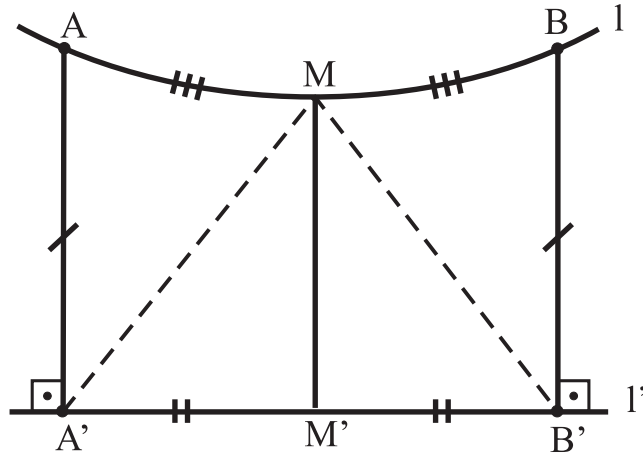
Demonstração: Sejam A', B' as bases das alturas de A e B em l' . Sejam M ponto médio de \overline{AB} e M' ponto médio de $\overline{A'B'}$. Por construção, o quadrilátero $\mathcal{P}(AA'B'B)$ é quadrilátero de Sacheri, de modo que $m(\angle A'AM) = m(\angle B'BM)$. Segue então que $\angle AA'M$ e $\angle BB'M$ são congruentes e conseqüentemente, seus complementares $\angle MA'M'$ e $\angle MB'M'$ também são congruentes. Temos então, pelo primeiro critério de congruência, que $\triangle MA'M' \simeq \triangle MB'M'$, donde segue que os pares $\angle MM'A', \angle MM'B'$ e $\angle M'MA, \angle M'MB$ de ângulos suplementares são congruentes, tratando-se portanto de ângulos retos, ou seja, $\overline{MM'}$ é perpendicular a ambas as retas l e l' .

Vamos agora demonstrar que $|AA'| > |MM'|$. Observe que nesta etapa não consideraremos o fato de existir outro ponto (B) equidistante de l' , mas apenas o fato de $\overline{AA'}$ ser perpendicular a l' .

Não podemos ter $|AA'| = |MM'|$, pois neste caso os quatro pontos formariam uma quadrilátero de Sacheri com três (e portanto quatro) ângulos retos.

Se supormos que $|AA'| < |MM'|$, podemos escolher um ponto $D \in \overline{MM'}$ de modo que $|AA'| = |DM'|$, obtendo um quadrilátero de Saccheri $\mathcal{P}(AA'M'D)$. Temos então que $m(\angle ADM') < \pi = m(\angle AMM') = m(\angle AMD)$, contradizendo o teorema dos ângulos externos, pois $m(\angle ADM')$ é ângulo externo do triângulo $\triangle(AMD)$.

Para concluir a demonstração, sejam $C \in l$ e $C' \in l'$. Consideremos o ponto $C^* \in l'$, base da altura por C . O ângulo reto $\angle CC^*C'$ é o maior ângulo do triângulo $\triangle(CC^*C')$, de modo que o lado oposto $\overline{CC'}$ tem comprimento maior ou igual que o lado $\overline{CC^*}$. Mas acabamos de demonstrar que $|CC^*| > |MM'|$, donde segue que $|CC'| \geq |CC^*| > |MM'|$. \square



Corolário .40 Sejam $l, l' \subset \mathbb{H}$ duas retas que possuem perpendicular comum $m = \overleftrightarrow{MM'}$, com $M \in l, M' \in l'$. Então:

1. As retas l e l' são paralelas;
2. m é a única perpendicular comum a ambas as retas;
3. Se $A, B \in l$ são pontos tais que $|AM| + |MB| = |AB|$ (M está entre A e B) e $|AM| = |BM|$ (ambos equidistantes de M), então A e B são equidistantes de l' .

Demonstração: Fica como exercício. \square

Vamos agora demonstrar a existência de um contínuo de retas paralelas.

Teorema .41 Dada reta l e um ponto $P \notin l$, seja $Q \in l$ tal que \overleftrightarrow{PQ} é perpendicular a l . Então existem semi-retas \overrightarrow{PX} e $\overrightarrow{PX'}$, com X e X' de lados opostos da reta \overleftrightarrow{PQ} , tais que uma semi-reta \overrightarrow{PY} intercepta l se e somente se $Y \in \text{int}(\angle XPX')$.

Demonstração: Seja m a reta por P perpendicular a \overleftrightarrow{PQ} e $S \in m$ distinto de P . Considere os conjuntos

$$\Sigma_1 = \left\{ Y \in \overleftrightarrow{SQ} \mid Q \text{ está entre } S \text{ e } Y \right\} \cup \left\{ Y \in \overleftrightarrow{SQ} \mid \overleftrightarrow{PY} \cap l \neq \emptyset \right\}$$

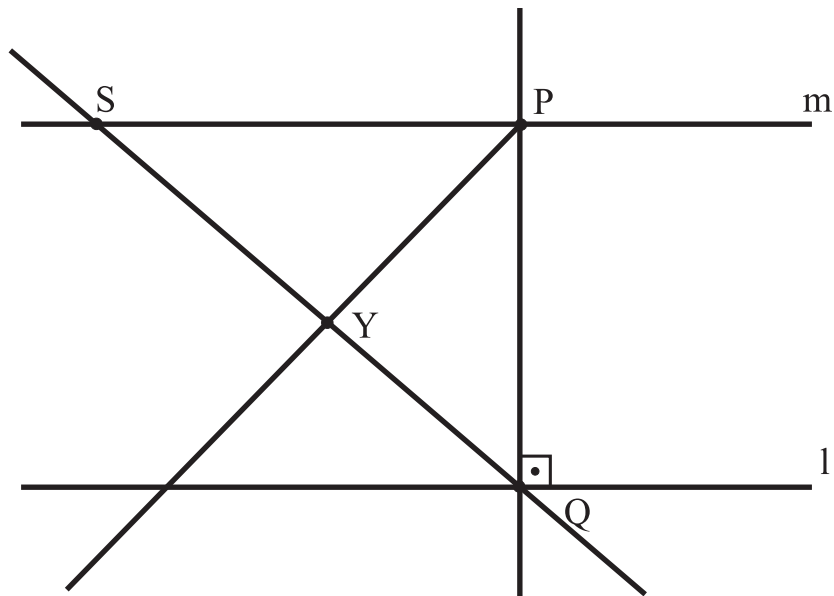
$$\Sigma_2 = \overleftrightarrow{SQ} \setminus \Sigma_1.$$

Pelo teorema das barras cruzadas (.15), os pontos de Σ_1 satisfazem a seguinte propriedade: se $Y \in \Sigma_1$ e Y' está entre Y e Q , então $Y' \in \Sigma_1$. Colocamos então na reta \overleftrightarrow{SQ} um sistema de coordenadas $f : \overleftrightarrow{SQ} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $s = f(S) < f(Q) = q$. Temos com isto que se $W \in \Sigma_1$ e $Z \in \Sigma_2$, então $w = f(W) > f(Z) = z$.

Pelo axioma do supremo (na reta real), existe $f \in \mathbb{R}$ tal que $f \leq w$, para todo $w = f(W)$, com $W \in \Sigma_1$. Se considerarmos então o ponto $X = f^{-1}(x)$, temos que uma semi-reta \overrightarrow{PY} intercepta a reta l se $Y \in \text{int}(\angle XPQ)$ e não a intercepta se $Y \in \text{int}(\angle XPQ')$. Devemos ainda mostrar que $X \in \Sigma_2$, ou seja, que $\overrightarrow{PX} \cap l = \emptyset$. Supomos por absurdo que $\overrightarrow{PX} \cap l = \{U\}$ e escolhemos ponto $V \in l$ tal que U se encontra entre V e Q . Como U e V estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{SQ} , mas P e U estão de lados opostos, temos que o segmento \overline{PV} deve interceptar a reta \overleftrightarrow{SQ} em um ponto Y entre S e X . Mas por construção $Y \in \Sigma_1$, contradizendo com isto a maximalidade de X .

Para construir o ponto X' procedemos de modo idêntico, apenas adotando como escolha inicial um ponto $S' \in m$ tal que P se encontre entre S e S' .

Resta apenas demonstrar que $m(\angle XPQ) = m(\angle X'PQ)$. Vamos supor por absurdo que $m(\angle XPQ) < m(\angle X'PQ)$. Construimos então semi-reta \overrightarrow{PS} com S e X do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{PQ} e de modo que $m(\angle XPQ) = m(\angle SPQ)$. Como $S \in \text{int}(\angle X'PQ)$, temos que a semi-reta \overrightarrow{PS} deve interceptar a reta l em um ponto, digamos R' . Tomamos $R \in l$ tal que Q seja ponto médio de R e R' . Como $m(\angle PQR) = m(\angle PQR') = \pi/2$, os triângulos $\triangle PQR$ e $\triangle PQR'$ são congruentes, de modo que $m(\angle QPR) = m(\angle QPR')$ e este último, por construção é congruente a $\angle QPX$. Obtemos assim que $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PR}$, um absurdo, pois acabamos de ver que $\overrightarrow{PX} \cap l = \emptyset$. \square



Observe que no teorema acima não podemos ter os pontos P , X , e X' colineares, pois isto implicaria na existência de uma única paralela a l passando por P , contradizendo o Axioma Hiperbólico Universal das Paralelas (.34). Os resultados seguintes seguem de modo imediato.

Corolário .42 *Seja l uma reta, $P \notin l$ e considere os pontos X e X' obtidos no teorema anterior. Então, uma reta m por P intercepta l se e somente se interceptar o interior do ângulo $\angle XPX'$.*

Corolário .43 *Dada reta l e $P \notin l$, existem infinitas retas por P paralelas a l . Mais ainda, se fixarmos uma paralela l' e definirmos uma função que associa a cada reta m por p a medida do ângulo entre m e l' , então, a imagem das retas paralelas a l é um intervalo da reta real.*

4 Modelo e consistência

Para construirmos um modelo para a geometria hiperbólica, lançaremos mão dos recursos de geometria diferencial, que por sua vez, do ponto de vista axiomático, estão baseados na construção dos números reais \mathbb{R} e em resultados de geometria euclidiana plana. Assim, se assumirmos a consistência dos números reais e da geometria euclidiana, ou seja, que a partir dos axiomas de um corpo ordenado completo e a partir dos axiomas da geometria euclidiana não podemos demonstrar resultados contraditórios (inexistência de paradoxos), então podemos assumir que a axiomática do plano hiperbólico também é consistente.

Existem diversos modelos interessantes para a geometria hiperbólica, cada qual com suas propriedades. Assim como ocorre com mapas distintos, dependendo da circunstância e dos objetos que queiramos estudar, podemos facilitar enormemente o nosso trabalho escolhendo o modelo mais adequado. Contudo, neste texto exploraremos com um mínimo de detalhes apenas o modelo conhecido como *semi-plano de Lobatchevsky*. Na última seção apresentaremos sem qualquer detalhe, apenas a título de curiosidade, o modelo do *disco de Poincaré*.

Realçamos ainda que a palavra modelo é empregada aqui no sentido pleno do termo, ou seja: qualquer afirmação que seja provada a partir de algum modelo, pode ser demonstrada a partir do corpo de axiomas da teoria. Em outras palavras, sob o ponto de vista de conteúdos, nada perdemos ao trabalharmos diretamente com os modelos, sem fazermos menção à estrutura axiomática.

4.1 Modelo do Semi-Plano

Para construirmos então modelo precisamos definir um conjunto de pontos, junto com uma família de subconjuntos (que representem as retas do espaço), uma função distância e uma medida de ângulos, que satisfaçam todos os axiomas enunciados nos capítulos anteriores.

Começamos definindo como espaço, conjunto de pontos, o conjunto

$$\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

As "retas" deste espaço são os seguintes subconjuntos:

- As semiretas ortogonais ao eixo real. Podemos parametrizar cada uma destas retas por $\gamma(t) = x_0 + e^{t_0+t}$, com $t \in \mathbb{R}$;
- Os semicírculos ortogonais ao eixo real. Novamente, podemos parametrizar cada uma destas retas por $\gamma(t) = (a + R \cos(\text{arccot}(t))) + iR \sin(\text{arccot}(t))$, com $t \in \mathbb{R}$.

Para evitar confusões, adotamos uma terminologia que será explicada mais adiante, e chamamos as "retas" desta geometria de *geodésicas*.

Para definirmo a distância entre pontos de \mathbb{H}^2 , precisamos antes estabelecer um modo de se medir comprimentos de curvas: se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ for uma curva continuamente diferenciável (de classe C^1), definimos seu comprimento por

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|}{y(t)} dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}}{y(t)} dt. \end{aligned}$$

Usando a regra da cadeia, é imediato constatarmos que este comprimento depende apenas do traçado da curva, ou seja, se tivermos $\phi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ um difeomorfismo, então $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi$ é uma curva com o mesmo traçado e $\|\gamma\| = \|\tilde{\gamma}\|$. Assim, iremos frequentemente considerar as curvas definidas no intervalo $I = [0, 1]$.

Definimos a função $d_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ como

$$d := d_{\mathbb{H}^2}(p, q) = \inf \|\gamma\|$$

onde o ínfimo é tomado sobre o conjunto de todas as curvas C^1 por partes¹ tais que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Exercício .44 *Demonstre que a função $d_{\mathbb{H}^2}(\cdot, \cdot)$ é de fato uma métrica. Tente, não é difícil!*

É possível definir uma fórmula explícita para esta métrica e mostrar que ela a definição de geodésicas é compatível com esta métrica, no sentido de estas serem as curvas que minimizam a distância entre pontos. Para este fim, e com o intuito de evitar longos e cansativos cálculos, vamos antes determinar as isometrias de (\mathbb{H}^2, d) .

4.2 Isometrias do Plano Hiperbólico

Uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ (matrizes de determinante 1) induz uma transformação

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ : z &\mapsto T_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

De fato, se escrevermos $z = x + iy$, temos que

$$\operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \operatorname{Im} \frac{(az + b) \overline{(cz + d)}}{|cz + d|^2},$$

de modo que

$$\operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} (az + b) \overline{(cz + d)} > 0.$$

¹Dizemos que uma curva γ definida em um intervalo $[a, b]$ é C^1 por partes se for contínua em $[a, b]$ e existir um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tais que a restrição de γ a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ seja de classe C^1 .

Mas

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(az + b) \overline{(cz + d)} &= \operatorname{Im}[a(x + iy) + b][c(x - iy) + d] \\
&= (ax + b)(-cy) + ay(cx + d) \\
&= y(ad - bc) \\
&= y
\end{aligned}$$

pois $\det A = ad - bc = 1$, de modo que $\operatorname{Im}(z) > 0$ se e somente se $\operatorname{Im}(T_A(z)) > 0$, ou seja, T_A é de fato uma transformação de \mathbb{H}^2 .

Teorema .45 *As transformações $T_A : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ são isometrias, ou seja, preservam comprimento de curvas ($\|T_A \circ \gamma\| = \|\gamma\|$) e conseqüentemente também a distância entre pontos ($d(z, w) = d(T_A(z), T_A(w))$).*

Demonstração: Demonstração deste resultado pode ser encontrada em [Fi, capítulo 4]. □

Assumindo este teorema, podemos demonstrar que duas geodésicas podem ser sempre identificadas através de uma transformação T_A , para alguma matriz A .

Teorema .46 *Dadas duas geodésicas $\gamma, \beta \subset \mathbb{H}^2$, existe $A \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $T_A(\gamma) = \beta$.*

Demonstração: Seja α a geodésica definida pela equação $x = 0$ e suponha que γ é uma semi-circunferência de centro p e raio r . Então, definindo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -p - r \\ \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \end{pmatrix}$$

temos que $\det C = 1$ e $T_C(\gamma) = \alpha$. Se γ for uma semi-reta definida pela equação $x = p$, definimos

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e novamente temos que $\det C = 1$ e $T_C(\gamma) = \alpha$. Agimos de modo similar para a geodésica β , obtendo matriz B de determinante 1 tal que $T_B(\beta) = \alpha$. Definimos então $A = B^{-1}C$ e temos que $T_A(\gamma) = \beta$. □

Podemos agora estabelecer a compatibilidade entre a estrutura métrica de (\mathbb{H}^2, d) e o conjunto de geodésicas definidas anteriormente:

Teorema .47 *As geodésicas de \mathbb{H}^2 , conforme definidas anteriormente, são curvas que minimizam a distância entre pontos.*

Demonstração: Antes de tudo, vamos demonstrar que as semiretas ortogonais ao eixo real minimizam distâncias. De fato, consideremos dois pontos $z_1 = x_0 + ia$ e $z_2 = x_0 + ib$ que diferem apenas em sua parte imaginária, com $b > a > 0$ e uma curva continuamente diferenciável $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, definida no intervalo $[0, 1]$ ligando estes dois pontos. Então,

$$\|\gamma\| = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt = \|\tilde{\gamma}\|$$

onde $\tilde{\gamma}(t) = x_0 + i[(1-t)a + tb]$ é um segmento de reta ligando os pontos z_1 e z_2 . Temos então que as semi-retas ortogonais ao eixo real são curvas que minimizam a distância entre tais pontos, e estas são únicas (é necessário usar algo como o Teorema do Valor Intermediário para mostrar a unicidade).

Dada uma semi-circunferência γ ortogonal ao eixo $\{\text{Im}(z) = 0\}$, sabemos pelo teorema .46 que existe $A \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $T_A(\gamma)$ é uma semireta ortogonal a este eixo, ou seja, uma geodésica. Mas como T_A age como isometria de \mathbb{H}^2 (teorema .45), temos que γ minimiza distâncias se e somente se $T_A(\gamma)$ também minimiza. Segue então que estas são as únicas curvas que minimizam a distância entre pontos nela contida. \square

Podemos agora definir explicitamente a função distância em \mathbb{H}^2 :

Teorema .48 *A distância em \mathbb{H}^2 é definida por qualquer uma das fórmulas equivalentes abaixo:*

$$d(z, w) = \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right) \quad (\text{i})$$

$$\cosh(d(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \text{Im}(z) \text{Im}(w)} \quad (\text{ii})$$

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2(\text{Im}(z) \text{Im}(w))^{1/2}} \quad (\text{iii})$$

$$\cosh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\text{Im}(z) \text{Im}(w))^{1/2}} \quad (\text{iv})$$

$$\tanh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} \quad (\text{v})$$

Demonstração: A equivalência entre as cinco igualdades decorre de uma simples manipulação de igualdades trigonométricas hiperbólicas. Logo nos limitaremos a demonstrar apenas uma delas, a igualdade (iii). Conforme vimos anteriormente, $d(x, y)$ é invariante pela ação das transformações T_A , $A \in SL(2, \mathbb{R})$, o mesmo valendo portanto para $\sinh\left(\frac{1}{2}d(x, y)\right)$. Além disto, é possível demonstrar ([Fi, demonstração do teorema 3.4]) que também o segundo membro da

igualdade (iii) é invariante pelas transformações T_A , $A \in SL(2, \mathbb{R})$. Podemos portanto considerar, sem perda de generalidade, o caso em que z e w estejam ambos contidos em uma semi-reta ortogonal ao eixo real, digamos $z = ia$ e $w = ib$, com $b > a$. Consideramos então a geodésica

$$\gamma(t) = i[(1-t)a + tb]$$

ligando ambos os pontos. Temos então que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|\gamma\| \\ &= \int_0^1 \frac{|b-a|}{(1-t)a + tb} dt \\ &= \ln((1-t)a + tb) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

e lembrando que $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, por simples substituição obtemos a igualdade (iii). \square

Para terminarmos a construção dos elementos básicos de \mathbb{H}^2 , falta apenas definirmos a medida de ângulos entre geodésicas. Definimos esta medida como sendo a medida euclidiana entre estas, ou seja, se $\gamma, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ são duas geodésicas parametrizadas com $\gamma(0) = \beta(0)$, definimos o ângulo entre elas como sendo o ângulo, no sentido euclidiano, entre seus vetores tangentes $\gamma'(0)$ e $\beta'(0)$.

Exercício .49 *Demonstre que, com as definições acima de "retas" (geodésicas), sistema de coordenadas (inverso de parametrização) e distância ($d_{\mathbb{H}^2}(\cdot, \cdot)$), \mathbb{H}^2 é de fato um modelo de geometria hiperbólica, ou seja, todos os axiomas definidos nos capítulos 2 e 3 são satisfeitos.*

4.3 Modelo do Disco de Poincaré

Sem qualquer detalhamento, apresentaremos apenas os fatos referentes ao modelo de Poincaré. O espaço em consideração é o disco unitário

$$\mathbb{D}^2 = \{s \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

As geodésicas do espaço são diâmetros do disco ou arcos de circunferências ortogonais a seu bordo. A distância é definida por qualquer uma das equações equivalentes

$$d(z, w) = \ln \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right) \quad (\text{i}^*)$$

$$\cosh^2 \left(\frac{1}{2} d(z, w) \right) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \quad (\text{ii}^*)$$

$$\sinh^2 \left(\frac{1}{2} d(z, w) \right) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \quad (\text{iii}^*)$$

$$\tanh \left(\frac{1}{2} d(z, w) \right) = \frac{|z - w|}{|1 - z\bar{w}|} \quad (\text{iv}^*)$$

Ângulos, assim como no modelo do semi-plano, são definidos simplesmente como o ângulo, no sentido euclidiano, entre os vetores tangentes às geodésicas nos pontos de intersecção.

Referências

- [Be] Alan F. Beardon - *The Geometry of Discrete Groups* - Springer Verlag, 1983.
- [Bo] Roberto Bonola - *Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development* - Dover, 1955.
- [BP] Riccardo Benedetti e Carlo Petronio - *Lectures on Hyperbolic Geometry* - Springer Verlag, 1992.
- [Fi] Firer, M. - *Grupos Fuchsianos* - Versão preliminar, Imecc/Unicamp 1999.
- [Hi] Hilbert, David - *Fundamentos de la geometría* - Textos Universitarios, 5; Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1991.
- [Po1] Henry Poincaré - *Ciência e Hipótese* - Editora da UnB, 1996.
- [RaRi] Arlan Ramsey and Robert D. Richtmyer, *Introduction to Hyperbolic Geometry*, Springer Verlag (Universitext), 1995.
- [Ro] Luiz Fernando C. da Rocha - *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana* - 16o. Colóquio Bras. de Mat. - Impa/CNPq, 1987.